

УДК 372.853
DOI: 10.26140/anip-2020-0904-0005

РЕЗОНАНС: ИСТОРИЧЕСКИЕ МИФЫ И ФИЗИЧЕСКАЯ РЕАЛЬНОСТЬ

© 2020
SPIN: 4635-7550
AuthorID: 33963
ScopusID: 7003469146

Бобылёв Юрий Владимирович, доктор физико-математических наук,
профессор кафедры «Общая и теоретическая физика»

SPIN: 9969-8531
AuthorID: 303177
ORCID: 0000-0002-1131-2574
ScopusID: 7004251306

Грибков Александр Иванович, кандидат физико-математических наук,
доцент кафедры «Общая и теоретическая физика»

SPIN: 6141-3922
AuthorID: 33959
ORCID: 0000-0001-8721-2521
ScopusID: 55770115300

Романов Роман Васильевич, кандидат физико-математических наук,
доцент кафедры «Общая и теоретическая физика»
Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого
(300026, Россия, Тула, пр. Ленина, 125, e-mail: rom_rom_vas@mail.ru)

Аннотация. Публикация представляет собой историко-физическое исследование одного из интереснейших явлений в природе и технике – резонанса. В работе проанализировано его описание в школьных и вузовских учебниках, в популярной литературе, прессе, исправлены исторические ошибки и физические неточности. Рассмотрено его использование в технике, полезные и вредные проявления этого явления. В работе приведено его подробное аналитическое описание на примере механической колебательной системы с трением и при его отсутствии. Приведены указания на математическую базу, необходимую для понимания решения. Особое внимание уделено сопутствующему резонансу процессу – биениям. Подробно показаны физико-методические особенности графического представления резонанса. Рассмотрен переход от идеализированной ситуации к реальной, ограниченной действительными параметрами. Представлен виртуальный эксперимент с использованием специально разработанного Windows-приложения, моделирующего явление на примере вертикальных колебаний небольшого шара, подвешенного на пружине в среде с учётом силы вязкого трения, линейно зависящей от скорости, и силы Архимеда. Разработанное приложение может использоваться для дистанционной демонстрации механических колебаний, а также для организации дистанционных виртуальных лабораторных работ, что в последнее время приобретает весьма актуальное значение.

Ключевые слова: резонанс, вынужденные колебания, компьютерное моделирование, история, явления, методика, преподавание, физика, анимация, биения, маятник, собственная частота, приложение, затухающие, решение, трение, груз, пружина, мост, разрушенный, трение, трещины.

RESONANCE: HISTORICAL MYTHS AND PHYSICAL REALITY

© 2020

Bobylev Yuri Vladimirovich, doctor of physics and mathematics sciences, professor
Gribkov Alexander Ivanovich, candidate of physics and mathematics sciences, associate professor
Romanov Roman Vasilyevich, candidate of physics and mathematics sciences, associate professor
Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University
(300026, Russia, Tula, Lenin Avenue, 125, e-mail: ks7a@ya.ru)

Abstract. The publication is a historical and physical study of one of the most interesting phenomena in nature and technology – resonance. The paper analyzes its description in school and University textbooks, popular literature, and the press, and corrects historical errors and physical inaccuracies. Its use in technology, useful and harmful manifestations of this phenomenon are considered. In this paper, a detailed analytical description of it is given on the example of a mechanical oscillatory system with friction and in its absence. There are indications of the mathematical base necessary for understanding the solution. Special attention is paid to the accompanying resonance process-beats. The physical and methodological features of the graphical representation of resonance are shown in detail. The transition from an idealized situation to a real one limited by actual parameters is considered. A virtual experiment is presented using a specially developed Windows application that simulates the phenomenon by the example of vertical vibrations of a small ball suspended on a spring in a medium taking into account the viscous friction force, which linearly depends on the speed, and the Archimedes force. The developed application can be used for remote demonstration of mechanical vibrations, as well as for organizing remote virtual laboratory work, which has recently become very relevant.

Keywords: resonance, forced, vibrations, computer, modeling, history, phenomena, methodology, teaching, physics, animation, beats, pendulum, proper, frequency, application, damped, solution, friction, load, spring, bridge, destroyed, friction, cracks.

*Если все шагают в ногу –
Мост об-ру-ши-ва-ет-ся!
Александр Галич [1].*

ВВЕДЕНИЕ

Постановка проблемы в общем виде и ее связь с важными научными и практическими задачами. Резонанс (от лат. *resono* – откликаюсь) – одно из интереснейших явлений в природе и технике и пример того, как малым воздействием можно добиться больших результатов. С детства мы знаем, как раскачать качели, а, повзрослев,

активно пользуемся телевизором и мобильным телефоном, иногда даже не подозревая, что одним из основных элементов этих устройств является колебательный контур, в котором для настройки на нужную частоту и используется рассматриваемое явление.

Резонанс полезен, когда мы проводим смычком по скрипичным струнам, играем на гитаре или органе, в лазере, в МРТ (магнитно-резонансная томография), готовим пищу в микроволновке и так далее.

МЕТОДОЛОГИЯ

Формирование целей статьи. Также, как и многие другие физические явления, резонанс окружён легендами, мифами, ошибками и неточностями. В нашей статье основная цель – опираясь на первоисточники и расчёты, исправить некоторые из них, излагая материал, в основном, на уровне, доступном школьнику.

РЕЗУЛЬТАТЫ

Изложение основного материала исследования с полным обоснованием полученных научных результатов.

Резонанс и история. Существует легенда [2], что великий русский певец Фёдор Иванович Шаляпин гостил в Крыму у князя Л. С. Голицына в имении Новый Свет (Парадиз), где производились шампанские вина. Хранили их в природном холодильнике — большом гроте на берегу моря (сейчас грот Шаляпина, грот Голицына, Эстрадный грот).



Рисунок 1 – Концерт в гроте Шаляпина. Фото [4]

Шаляпину так понравился экзотический зал с идеальной акустикой, что он запел во весь голос, отчего фужер с шампанским лопнул в его руке. И это, скорее всего, первый миф, так как, видимо, Шаляпин никогда не бывал в Новом Свете [3]. Также существуют воспоминания, что от его пения лопались плафоны люстр, но доверять этому также вряд ли стоит.



Рисунок 2 – Басков и разрушенная от резонанса рюмка. Фото [5]

А вот Николай Басков этот трюк, а физики бы сказали – физический эксперимент, повторил успешно, правда, с «мухинским» стаканом он не справился, а с тонкостенной рюмкой – вполне (рис. 2).

Этот же опыт с возбуждением звуковыми волнами можно посмотреть и в программе «Галилео» [6], а теоретическое описание в [7].

Как обычно, какое-либо явление может быть не только полезно, но и вредно. Раскачивание вагонов на стыках рельсов, раскачивание груза на тросе подъёмного крана, распыливание воды в ведре при его переносе и

так далее не приводят ни к чему хорошему.



Рисунок 3 – Разбить бокал резонансом. Фото [6]

Резонанс и мосты. Особенно много пишут про разрушение мостов. «Такой случай произошёл в 1906 году в Петербурге при переходе кавалерийского эскадрона через мост на реке Фонтанке» [8, С. 39]. Такую же фразу можно встретить ещё в ряде учебников [9, С. 174; 10, С. 128], где также упоминаются Такомакий мост и мост в Анжере. И похоже, это тоже мифы.

Газета «Новости дня» [11] от 21 января (по старому стилю) 1905 (не 1906) года сообщает, что «Сегодня в 12 1/2 час. дня при следовании лейб-гвардии конного-гренадерского полка через Египетский цепной мост через Фонтанку, ..., мост обрушился». Для ориентировки в исторической хронологии: это произошло через несколько дней после Кровавого воскресенья и сдачи Порт-Артура.



Рисунок 4 – Разрушенный Египетский мост. Фото из ЦГАКФФД [12]

Причина катастрофы так до конца и не была установлена. Скорее всего, сработал ряд факторов, и резонанс здесь далеко не главный.

Очевидцы утверждают, что лошади, хоть и обучены были ходить церемониальным шагом, но по мосту двигались «не в ногу», а некоторые всадники спешились. Навстречу им двигались 11 гружёных саней с возницами.

Комиссия Городской думы [13] предположила, что виной катастрофы была раковина в металле одного из звеньев цепи, однако в кованых («сваренных») полосах и брусках, из которых были сделаны цепи, такое явление случается крайне редко. В наши дни высказывается предположение, что мост погиб из-за явления хладноломкости.

Такомакий мост (Такома-Нэрроуз, англ. Tacoma Narrows Bridge, США, штате Вашингтон) был открыт 1

июля 1940 года, а разрушился 7 ноября 1940 года. Часто причиной аварии считают явление механического резонанса, когда внешняя частота изменения ветрового потока совпадает с внутренней частотой колебаний конструкций моста.

Однако истинной причиной стал аэроупругий флаттер (динамические крутильные колебания) из-за недоучёта ветровых нагрузок при проектировании сооружения [14, 15].



Рисунок 5 – Разрушение Tacoma Narrows Bridge. Фото [16]

Мост Бас-Шен (Pont de la Basse-Chaine) в городе Анже (уст. Анжер, фр. Angers, Франция) разрушился 16 апреля 1850 года, а не 1750 года, как написано в ряде учебников.

При этом погибло 223 солдата, шедших по мосту в грозу и при сильном ветре [17, С. 84]. Однако, выжившие говорят, что мост уже раскачивался от ветра, и шли они «не в ногу».

Расследование выявило, что тросы моста были поражены коррозией. Резонанс, скорее всего, не виноват в этой трагедии.



Рисунок 6 – Разрушенный мост Бас-Шен. Фото [18]

Бротонский мост (Broughton Suspension Bridge) через реку Ирвелл (Irwell) в городе Бротон, в графстве Большой Манчестер, Англия, был разрушен 12 апреля 1831 года.

Отряд из 74 человек возвращался в казармы и солдаты, которые шли по четыре в ряд, почувствовали, что мост начинает вибрировать в такт их шагам. Находя вибрацию приятным ощущением, некоторые из них начали ещё и насвистывать маршевую мелодию, и мост рухнул. Глубина реки была небольшая, все выжили, но шестеро получили серьёзные травмы [19].

Отметим, что в ходе расследования было выяснено, Азимут научных исследований: педагогика и психология.

что уже при строительстве моста там, где следовало использовать два болта, был поставлен только один. А сам этот болт оказался некачественным. Так что и здесь резонанс сыграл, видимо, не главную роль.

В результате инцидента британские военные издали приказ о том, что войска должны «break step» («сломать шаг») при переходе через мосты. Вряд ли французы не знали об этом на 20 лет позже при переходе через мост Бас-Шен.



Рисунок 7 – Восстановленный мост Бротона. Фото [20]

Проблема резонанса относится не только к подвесным мостам и к далёкому прошлому.



Рисунок 8 – Дорога жизни. Ленинград. Ладога

В Великую Отечественную войну при наведении участка «Дороги жизни» по Ладожскому озеру защитники Ленинграда столкнулись с похожим явлением. Волна, образовавшаяся под прогибающимся льдом из-за движения машин, двигалась с постоянной для определённой толщины льда и глубины водоёма скоростью.

Она могла опережать приложенную нагрузку или отставать от неё, но опасным было совпадения этих скоростей – тогда вода прекращала поддержку ледяного покрова и лёд разрушался.

Это проявление резонанса было названо изгибно-гравитационной волной. Советские учёные дали рекомендации по скорости и частоте движения машин, и проблема была устранена [21].

Мост Миллениум или Мост Тысячелетия (London Millenium Footbridge) первый раз был открыт 10 июня 2000 года.

Однако опять-таки из-за ошибок проектирования он сильно раскачивался. Учёным пришлось провести сложные расчёты [23] и в его конструкцию добавлять демпферы (гасители колебаний). Мост повторно открыли 22 февраля 2002 года.



Рисунок 9 – London Millenium Footbridge. Фото [22]

20 мая 2010 года около шести часов вечера пришёл колебательное движение балочный мост через Волгу в Волгограде. Причиной стали ветер и ошибки в проектировании. Жертв и разрушений не было, дефект исправили с помощью многотонных демпферов в опорах моста, но название «танцующий мост» закрепилось [24].



Рисунок 10 – «Танцующий мост» в Волгограде.
 Фото [25]

В Екатеринбурге во время Крестного хода памяти Святых Царственных страстотерпцев в ночь с 16 на 17 июля 2016 года православные верующие раскачали бетонный мост. На видео [26] видно, как огромное количество людей одновременно идут по мосту, что вызывает его колебания. Особенно отчётливо это видно на стыке бетонных плит, где трещины в асфальте, резонируя, сходятся и расходятся.



Рисунок 11 – «Треснувший мост» в Екатеринбурге.
 Фото [27]

Подводя итоги, можно сказать, что описанные случаи разрушения мостов не всегда связаны с резонансом, как основной причиной. Чаще это разрушение материалов или ошибки проектирования.

Тем не менее, при движении по мостам рекомендуются определённые меры предосторожности. Необходимо снижать скорость машин и поездов или использовать бесстыковые рельсы, как на железнодорожной арке Крымского моста.

При движении по мосту или в казарме, если она на втором или третьем этаже, необходимо соблюдать требования Строевого устава: «83. При необходимости идти не в ногу подаётся команда «Идти не в ногу» [28]. Аналогичная команда «Route step, march!» существует и в американской армии [29].



Рисунок 12 – Неудачная попытка разрушить мост.
 Фото [30].

Заметим, что ввести при ходьбе мост в резонанс и разрушить его – непростое дело. Создатели программы MythBusters (Разрушители легенд) с помощью 12 роботов-солдат с пневматическими «ногами» не смогли разрушить специально построенный для такого эксперимента мост [30]. Во-первых, собственная частота колебаний моста не совпала с частотой движения (солдаты идут с частотой 120 шагов в минуту – 2 Гц), а, во-вторых, не хватило амплитуды вынуждающей силы.

Таким образом, большую часть историй, связанных с разрушениями от резонанса, следует признать мифами или недостаточно доказанными.

Перейдем к физическим неточностям при описании этого явления.

Резонанс в системе с трением. Рассмотрим колебательную систему, состоящую из груза массой m на вертикальной пружине с коэффициентом жёсткости k , верхний конец которой может колебаться вверх-вниз с частотой ω по закону

$$x_m \cos \omega t, \quad (3.1)$$

где x_m – амплитуда колебаний. Задача одномерная, поэтому единственную ось OX направим вниз (рис. 13).

Тогда координата груза, отсчитанная от центра положения точки подвеса,

$$x(t) = l(t) + x_m \cos \omega t, \quad (3.2)$$

где $l(t)$ – длина пружины. На груз действуют сила тяжести, сила упругости со стороны пружины, сила сопротивления среды, противоположная направлению скорости и ей же пропорциональная, и сила Архимеда. По теореме о движении центра масс

$$ma_x = (m - m_0)g - k(l(t) - l_0) - \mu v_x, \quad (3.3)$$

где g – ускорение свободного падения, l_0 – длина нерастянутой пружины, μ – коэффициент сопротивления, который зависит от свойств среды и формы движущегося тела, m_0 – масса среды, взятая в объёме груза. Подставляя

(3.2) в (3.3), получаем

$$m a_x = (m - m_0)g - k(x - x_m \cos \omega t - l_0) - \mu v_x, \quad (3.4)$$

или

$$m a_x + \mu v_x + kx = (m - m_0)g + k l_0 + k x_m \cos \omega t. \quad (3.5)$$

Если система не движется и находится в равновесии, то сила тяжести с поправкой на силу Архимеда и сила упругости уравниваются друг друга

$$(m - m_0)g = k \Delta l = k(x_G - l_0), \quad x_G = \frac{(m - m_0)g}{k} + l_0, \quad (3.6)$$

где x_G – координата точки равновесия. Сам же груз в начальный момент времени с учётом (3.1) покоится и находится в положении

$$x|_{t=0} = x_0 = \frac{(m - m_0)g}{k} + l_0 + x_m = x_G + x_m, \quad v_x|_{t=0} = 0. \quad (3.7)$$

Эту вполне реалистичную ситуацию и примем за начальные условия.

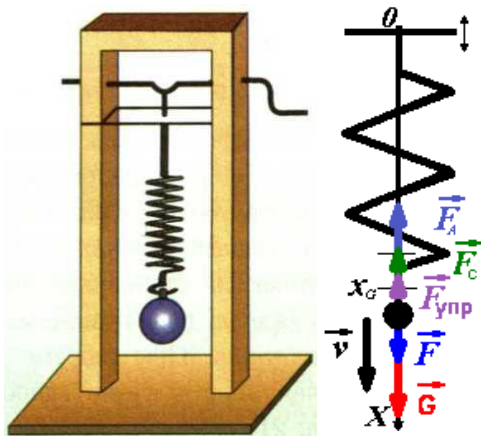


Рисунок 13 – Схема установки и силы

Напомним, что проекция скорости – это первая производная координаты по времени, а проекция ускорения – вторая производная координаты. Тогда уравнение (3.5) принимает вид

$$m x'' + \mu x' + kx = k x_G + k x_m \cos \omega t. \quad (3.8)$$

Здесь производная обозначена не d/dt , а штрихом ($'$), как в большинстве школьных учебников.

Если ещё ввести обозначения

$$\delta = \frac{\mu}{2m}, \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}, \quad (3.9)$$

то уравнение принимает вид

$$x'' + 2\delta x' + \omega_0^2 x = \omega_0^2 x_G + \omega_0^2 x_m \cos \omega t. \quad (3.10)$$

Почти каждый студент скажет, что это обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка, линейное, с постоянными коэффициентами, неоднородное.

Его решение в курсе математики Высшей школы ищут в виде общего решения однородного уравнения (затухающих колебаний)

$$A_0 e^{-\delta t} \cos(\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2} t + \varphi_0), \quad \text{при} \quad \delta < \omega_0, \quad (3.11)$$

и частного решения неоднородного, которое выберем в виде

$$x_G + A \cos(\omega t - \varphi), \quad (3.12)$$

где A_0 – амплитуда, φ_0 – начальная фаза, которые находятся из начальных условий. Частота ω_0 – собственная

частота колебаний, а δ (от лат. decrementum – уменьше-

ние, убыль) – декремент затухания, который и определяет быстроту исчезновения колебаний. Величины A и φ

определяются (проверяется подстановкой) параметрами системы.

$$A = \frac{x_m \omega_0^2}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\delta^2 \omega^2}}, \quad \operatorname{tg} \varphi = \frac{2\delta \omega}{\omega_0^2 - \omega^2}. \quad (3.13)$$

При $\omega < \omega_0$ $\varphi > 0$ и колебания отстают от вынуждающей силы, а при $\omega > \omega_0$ $\varphi < 0$ – опережают.

Поясним, что для уравнения (3.10) есть ещё 2 аперидических вида решения однородного уравнения при $\delta \geq \omega_0$, однако из-за отсутствия колебаний в этом случае

бессмысленно говорить о резонансе, хотя с позиций корректности математических рассуждений упомянуть об этом стоит (неточность 1).

С точки зрения физики (3.10) – это уравнение вынужденных колебаний с двумя вынуждающими силами. Одна – постоянная (сила тяжести с поправкой на силу Архимеда). Она приводит к смещению положения равновесия в точку x_G . Вторая сила – переменная, которую можно записать как $F = m x_m \omega_0^2 \cos \omega t = F_0 \cos \omega t$. Эта

сила показана на рисунке 13. Она и может привести к резонансу.

В Физической энциклопедии даётся следующее определение: «Резонанс – частотно-избирательный отклик колебательной системы на периодическое внешнее воздействие, при котором происходит резкое возрастание амплитуды стационарных колебаний» [31, С. 306].

Часто пишут, что собственные затухающие колебания (3.11) достаточно быстро исчезнут, и останутся только вынужденные гармонические (3.12) с амплитудой (3.13). Однако о резонансе имеет смысл говорить, только при малом трении, поэтому максимальная амплитуда больше, чем (3.13), по крайней мере, на начальном этапе, который в этом случае может продолжаться достаточно долго. Кроме того, при близких частотах могут наблюдаться так называемые «биения» (подробнее в следующей части публикации) (неточность 2). Здесь дадим только определение этого явления.

«Биения – периодическое изменение во времени амплитуды колебания, возникающее при сложении двух гармонических колебаний с близкими частотами» [34, С. 201].

Максимальная амплитуда (3.13) вынужденного решения достигается при резонансной частоте, которая находится по минимуму подкоренного выражения в (3.13), причём для простоты нахождения экстремума производную имеет смысл брать по ω^2 , что доступно школьни-

ку чуть выше среднего уровня. Эта частота равна

$$\omega_r = \sqrt{\omega_0^2 - 2\delta^2}, \quad (3.14)$$

то есть меньше собственной частоты, хотя часто говорят, что они совпадают (неточность 3). Из (3.14) также видно, что резонанс возможен только при декременте $\delta < \omega_0 / \sqrt{2}$, то есть при сравнительно небольшом сопро-

тивлении, что уже отмечалось выше.

Вместе с тем заметим, что максимум первой производной (скорости в механике) достигается строго при совпадении частот $\omega_r = \omega_0$. Правда, получение этого ре-

зультата требует более серьёзных навыков дифференцирования, что уже даже продвинутому школьнику вряд ли доступно. Но всё же, говоря о достижении максимальных значений, следует уточнять, максимума какой величины мы хотим достичь (неточность 4).

Наиболее актуально это, видимо, в электрических цепях, где речь может идти о резонансе напряжений или токов.

Амплитуда и фаза вынужденных колебаний при резонансной частоте равны

$$A(\omega_r) = \frac{x_m \omega_0^2}{2\delta \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}}, \quad \operatorname{tg} \varphi_r = \frac{\sqrt{\omega_0^2 - 2\delta^2}}{\delta}. \quad (3.15)$$

Заметим, что при $\omega = \omega_0$ амплитуда меньше, чем при резонансной частоте, а фаза составляет 90° .

$$A(\omega_0) = \frac{x_m \omega_0}{2\delta}, \quad \varphi(\text{т.е. } \omega = \omega_0) = \frac{\pi}{2}. \quad (3.16)$$

Амплитудная $A(\omega)$ и фазовая $\varphi(\omega)$ резонансные кривые при разных δ приведены на рис. 14. Там же показана зависимость $\varphi_r(\omega_r)$ – точечная линия, которую можно получить из (3.15)

$$\varphi_r = \operatorname{arctg} \left(\frac{\omega_r}{\delta} \right) = \operatorname{arctg} \left(\frac{\sqrt{2}\omega_r}{\sqrt{\omega_0^2 - \omega_r^2}} \right), \text{ где } \omega_r < \omega_0. \quad (3.17)$$

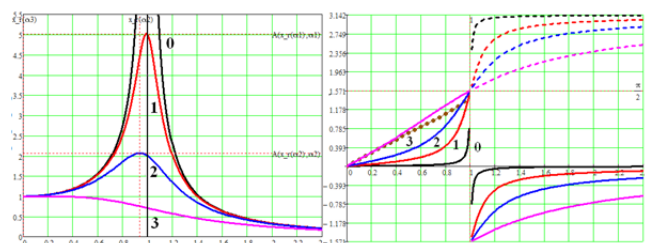


Рисунок 14 – Амплитудная $A/x_m(\omega/\omega_0)$ и фазовая

$$\varphi(\omega/\omega_0)$$

резонансные зависимости. Зависимость $\varphi_r(\omega_r/\omega_0)$.

$$0 - \delta/\omega_0 = 0,01; \quad 2 - \delta/\omega_0 = 0,25; \quad 3 - \delta/\omega_0 = 0,707$$

Некоторое недоразумение (неточность 5) может вызвать кривая 0 при $\delta \rightarrow 0$, приводимая во многих, в том

числе и вузовских, пособиях, то есть в идеальном случае при отсутствии сопротивления.

Создаётся иллюзия, что амплитуда уходит в бесконечность и можно получить неограниченные колебания. Во-первых, систем совсем без трения не бывает и недоразумение снимается. Во-вторых, детальные пояснения для идеального случая $\delta = 0$ будут даны в следующей

части публикации.

Фазовую кривую обычно рисуют непрерывной линией в диапазоне $0 < \varphi < \pi$, не упоминая о знаках и перио-

дичности функции тангенс (неточность 6). На рисунке 14 эти зависимости показаны сплошной-пунктирной линией.

Математически корректнее из (3.13) написать

$$\varphi = \operatorname{arctg} \left(\frac{2\delta\omega}{\omega_0^2 - \omega^2} \right) + \pi n, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \quad (3.18)$$

и показывать зависимости в диапазоне $-\pi/2 < \varphi < \pi/2$

как на рисунке 14 (сплошные-сплошные линии), хотя для резонанса достаточно говорить только об области $\omega < \omega_0$.

В первом варианте при отсутствии сопротивления ($\delta \rightarrow 0$), кривая преобразуется в ступень

$$\varphi = \begin{cases} 0, & \omega < \omega_0 \\ \pi/2, & \omega = \omega_0 \\ \pi, & \omega > \omega_0 \end{cases}, \quad (3.19)$$

Во втором случае фаза $\varphi = 0$ в любом случае, кроме проблемной точки $\omega = \omega_0$.

Вышеприведённые формулы и рассуждения здесь даны без вывода, так как их без труда можно найти во многих учебниках, например, [32, С. 531; 33, С. 139], и они вполне доступны для студентов.

Теперь рассмотрим детальный случай отсутствия трения, причём решать будем достаточно подробно и доступно ученикам средней школы.

Резонанс в системе без трения. Школьники не умеют решать дифференциальные уравнения, поэтому упростим задачу и проведём её решение очень подробно. Во-первых, будем считать, что трения нет $\beta = 0$,

$\delta = 0$. Во-вторых, перенесём начало отсчёта в точку равновесия x_G .

Тогда старая и новая координаты будут связаны как $x(t) = X(t) + x_G$, а уравнение (3.10) примет вид

$$X'' + \omega_0^2 X = \omega_0^2 x_m \cos \omega t. \quad (4.1)$$

Предложим искать решение в виде суммы двух колебаний с разными частотами и начальными фазами и простой подстановкой убедимся, что это верно.

$$X = A_0 \cos(\omega_0 t + \varphi_0) + A \cos(\omega t + \varphi). \quad (4.2)$$

Производные они вычислять умеют с 10 класса, поэтому

$$v_x = X' = -A_0 \omega_0 \sin(\omega_0 t + \varphi_0) - A \omega \sin(\omega t + \varphi), \quad (4.3)$$

$$a_x = X'' = -A_0 \omega_0^2 \cos(\omega_0 t + \varphi_0) - A \omega^2 \cos(\omega t + \varphi), \quad (4.4)$$

Подставим (4.2) и (4.4) в (4.1)

$$-A_0 \omega_0^2 \cos(\omega_0 t + \varphi_0) - A \omega^2 \cos(\omega t + \varphi) + \omega_0^2 (A_0 \cos(\omega_0 t + \varphi_0) + A \cos(\omega t + \varphi)) = \omega_0^2 x_m \cos \omega t. \quad (4.5)$$

После сокращения

$$A(\omega_0^2 - \omega^2) \cos(\omega t + \varphi) = \omega_0^2 x_m \cos \omega t. \quad (4.6)$$

Используем формулу «косинус суммы» (тоже 10 класс)

$$A(\omega_0^2 - \omega^2) (\cos \omega t \cos \varphi - \sin \omega t \sin \varphi) = \omega_0^2 x_m \cos \omega t. \quad (4.7)$$

Так как это уравнение должно выполняться в любой момент времени, то приравняем коэффициенты при $\cos \omega t$ и $\sin \omega t$.

$$\begin{cases} A(\omega_0^2 - \omega^2) \cos \varphi = \omega_0^2 x_m \\ A(\omega_0^2 - \omega^2) \sin \varphi = 0. \end{cases} \quad (4.8)$$

Решая систему (4.8), получаем

$$\begin{cases} A = \frac{\omega_0^2 x_m}{\omega_0^2 - \omega^2} \\ \varphi = 0. \end{cases} \quad (4.9)$$

Заметим, что из (3.13) можно было получить это решение, но с осторожностью, так можно потерять знак для амплитуды. Также видим, что сдвиг фаз в этом случае равен точно 0.

С учётом (4.9) координата (4.2) принимает вид

$$X = A_0 \cos(\omega_0 t + \varphi_0) + \frac{\omega_0^2 x_m}{\omega_0^2 - \omega^2} \cos \omega t, \quad (4.10)$$

а скорость

$$v_x = -A_0 \omega_0 \sin(\omega_0 t + \varphi_0) - \omega \frac{\omega_0^2 x_m}{\omega_0^2 - \omega^2} \sin \omega t. \quad (4.11)$$

Начальные условия (груз в покое) очевидны из (3.7)

$$\begin{cases} X|_{t=0} = x_m \\ v_x|_{t=0} = 0. \end{cases} \quad (4.12)$$

Подставим в них (4.10) и (4.11)

$$\begin{cases} x_m = A_0 \cos \varphi_0 + \frac{\omega_0^2 x_m}{\omega_0^2 - \omega^2} \\ 0 = -A_0 \omega_0 \sin \varphi_0. \end{cases} \quad (4.13)$$

Тогда, решая эту систему, получаем

$$\begin{cases} A_0 = x_m - x_m \frac{\omega_0^2}{\omega_0^2 - \omega^2} = -x_m \frac{\omega^2}{\omega_0^2 - \omega^2} \\ \varphi_0 = 0. \end{cases} \quad (4.14)$$

Окончательно решение имеет вид

$$X(t) = x_m \left(\frac{\omega_0^2}{\omega_0^2 - \omega^2} \cos \omega t - \frac{\omega^2}{\omega_0^2 - \omega^2} \cos \omega_0 t \right), \quad (4.15)$$

которое можно переписать ещё в двух вариантах

$$X(t) = x_m \left(\cos \omega_0 t + \frac{\omega_0^2}{\omega_0^2 - \omega^2} \cos \omega t - \frac{\omega_0^2}{\omega_0^2 - \omega^2} \cos \omega_0 t \right), \quad (4.16)$$

$$X(t) = x_m \left(\cos \omega t + \frac{\omega^2}{\omega_0^2 - \omega^2} \cos \omega t - \frac{\omega^2}{\omega_0^2 - \omega^2} \cos \omega_0 t \right). \quad (4.17)$$

Используем в (4.16) и (4.17) формулу «разность косинусов» (10 класс)

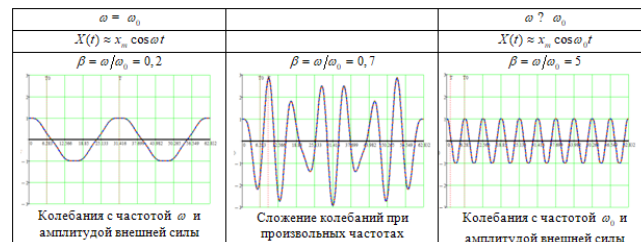
$$X(t) = x_m \left(\cos \omega_0 t - 2 \frac{\omega_0^2}{\omega_0^2 - \omega^2} \sin \left(\frac{\omega - \omega_0}{2} t \right) \sin \left(\frac{\omega + \omega_0}{2} t \right) \right), \quad (4.18)$$

$$X(t) = x_m \left(\cos \omega t - 2 \frac{\omega^2}{\omega_0^2 - \omega^2} \sin \left(\frac{\omega - \omega_0}{2} t \right) \sin \left(\frac{\omega + \omega_0}{2} t \right) \right). \quad (4.19)$$

В первом случае выделены собственные колебания, а во-втором – вынужденные.

Данное решение удобно проиллюстрировать с помощью графиков.

Таблица 1 – Иллюстрация решения (4.19)



При малой внешней частоте $\omega = \omega_0$ это гармонические колебания с частотой вынуждающей силы (таблица 1, левый столбец).

При большой внешней частоте $\omega \neq \omega_0$ сложнее.

Решение принимает вид

$$X(t) = x_m \left(\cos \omega_0 t - \frac{\omega_0^2}{\omega^2} \cos \omega t \right). \quad (4.20)$$

Если забыть про трение, как в нашем рассмотрении, то первое слагаемое преобладает, и это гармонические колебания с собственной частотой, как показано в таблице 1, правый столбец.

Если всё же помнить про затухание и применить точное решение, то первое слагаемое исчезнет, и останется только второе, то есть колебания с частотой вынуждающей силы, но очень малой амплитудой, как отмечено, например, в [8, С. 34]. Система не будет успевать реагировать на внешнюю силу и находится почти в равновесии.

В произвольном случае это довольно сложное движение с большей амплитудой, рассчитанное как сумма двух гармонических колебаний с разными амплитудами (4.15) (таблица 1, средний столбец).

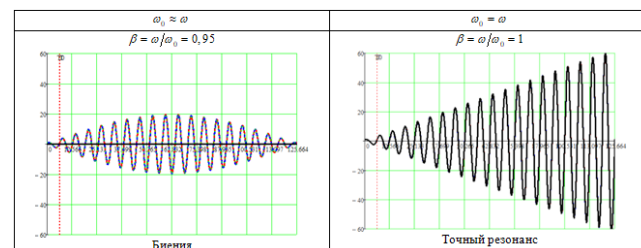
Практически интереснее случай, когда частоты близки, первое слагаемое в (4.18) или (4.19) мало, и наблюдаются биения с большим периодом

$$T_b = \frac{2\pi}{|\omega_0 - \omega|} = \frac{TT_0}{|T - T_0|}$$

(таблица 2, слева). На рисунке 18 показан только один такой период, а дальше процесс повторяется.

Эффект биений используют с целью подстройки одного источника (регулируемого) под частоту другого (эталонного). В процессе подстройки частоту регулируемого источника изменяют таким образом, чтобы период биений увеличивался до тех пор, пока последние не исчезнут. Это означает, что частоты совпадают и наступило явление резонанса.

Таблица 2 – Иллюстрация биений и совпадения частот



При точном резонансе $\omega_0 = \omega$ для анализа формул

(4.18) или (4.19) следует использовать первый замечательный предел или тот факт, что при малых углах

$\sin \varphi \approx \varphi$ (тоже 10 класс).

$$X(t) = x_m \left(\cos \omega_0 t + \frac{\omega_0 t}{2} \sin \omega_0 t \right) = x_m \sqrt{1 + \left(\frac{\omega_0 t}{2} \right)^2} \cos(\omega_0 t - \varphi_r)$$

, где $\operatorname{tg} \varphi_r = \frac{\omega_0 t}{2}$. (4.21)

Видим, что это гармонические колебания с амплитудой, которая действительно стремится к бесконечности, но за бесконечное время!

Колебания отстают от вынуждающей силы, но с непостоянной фазой, также растущей со временем от 0 до $\pi/2$.

Эту же формулу можно переписать, используя понятия периода

$$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}, \quad X(t) = x_m \sqrt{1 + \left(\frac{\pi t}{T_0} \right)^2} \cos\left(\frac{2\pi t}{T} - \varphi_r\right), \quad \text{где}$$

$$\operatorname{tg} \varphi_r = \frac{\pi t}{T_0}. \quad (4.22)$$

Тогда отношение амплитуды в произвольный момент времени к исходной равно

$$\frac{X(t)}{X(0)} = \sqrt{1 + \left(\frac{\pi t}{T_0} \right)^2} = \sqrt{1 + (\pi N)^2}, \quad (4.23)$$

где N – число периодов. То есть через один период амплитуда вырастет в 3,30 раза, через 2 периода – 6,36, и дальше рост станет почти линейным.

Остановимся более подробно на вопросе бесконечного роста амплитуды колебаний при резонансе, следующего из формул (4.21) – (4.23). Такое неограниченное возрастание, конечно, является идеализацией, и, как уже говорилось в конце предыдущего пункта, невозможно, поскольку систем без трения не существует. Помимо данной причины, имеются ещё ряд теоретических и практических положений, не допускающих возможности бесконечных по амплитуде колебаний.

Прежде всего, нужно отметить, что уравнения (3.10) или (4.1), решениями которых являются формулы (4.21) – (4.23), справедливы вблизи положения статического равновесия x_G . Действительно, при выводе урав-

нения колебаний всегда предполагается, что упругие силы будут пропорциональны отклонению от положения равновесия системы лишь вблизи этого положения равновесия, что математически выражается в разложении потенциальной энергии системы в ряд и оставлении в этом ряде только квадратичных по отклонению членов. Таким образом, с увеличением амплитуды колебания становятся нелинейными, что приводит к нелинейному сдвигу частоты и нарушению условий резонанса. Вследствие этого нарастание амплитуды колебаний ограничивается. В результате получаем, что в отличие от линейного осциллятора амплитуда вынужденных колебаний нелинейного осциллятора всегда остаётся конечной, даже при изначально точном совпадении частоты вынуждающей силы ω и собственной частоты колебательной системы ω_0 .

Помимо описанного ограничения роста амплитуды колебаний областью линейного резонанса, нужно также упомянуть и о невозможности практической реализации таких колебаний. Действительно, растяжение пружины относительно своего недеформированного состояния может быть достаточно значительным. Например, пружину обычного школьного динамометра можно рас-

тянуть, чтобы в ней не осталось никакой остаточной деформации, примерно раз в пять. Однако амплитуда колебаний относительно статического положения равновесия будет гораздо меньше, поскольку сжатие пружины, при котором колебания остаются линейными, возможно лишь до соприкосновения витков пружины друг с другом.

В заключение нужно заметить, что всё предыдущее рассмотрение относилось к колебаниям макроскопических тел – грузов на пружине. В этом случае характер зависимости потенциальной энергии от координат практически никогда специально не обговаривался, по крайней мере, в курсе физики в педагогическом вузе, данная зависимость сразу принималась квадратичной, что и приводило к линейности колебаний. Если же рассматривается практически более интересный случай – колебания атомов в молекулах в задаче расчёта молекулярных спектров, то здесь мы уже имеем соответствующие формулы потенциальной энергии, и для правильности получаемых результатов, с увеличением амплитуды колебаний, происходящим вследствие повышения температуры, нужно будет сначала вычислять ангармонические поправки, а затем исследовать нелинейную стадию колебаний, в частности, нелинейный резонанс. При этом никакого бесконечного роста амплитуды колебаний атомов в молекуле наблюдаться, разумеется, не будет. При слишком больших по амплитуде колебаниях атомов в молекуле, то есть большой их кинетической энергии, происходит просто диссоциация этих молекул.

Виртуальное моделирование. Вышеприведённый анализ явления был проиллюстрирован графиками, подготовленными с помощью среды PTC Mathcad, которая на сайте производителя позиционируется как инженерное математическое программное обеспечение, которое позволяет выполнять, анализировать важнейшие инженерные расчёты и обмениваться ими. Авторы достаточно давно и успешно им пользуются [35] и рекомендуют не только студентам, но и школьникам. Однако у этой среды есть существенный недостаток: рабочие листы, подготовленные в нём, читаются только при установленном программном продукте, который достаточно дорог.

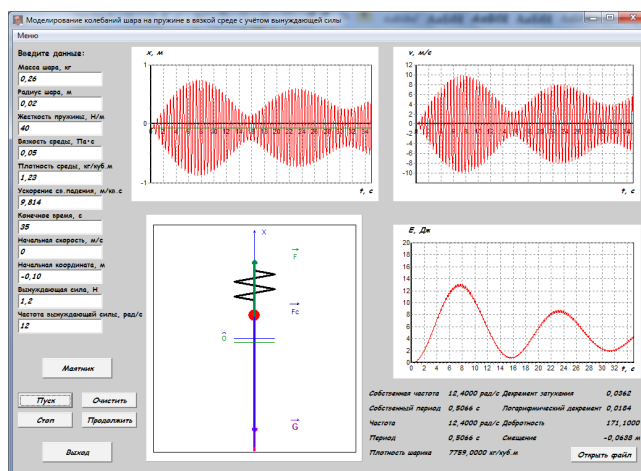


Рисунок 15 – Главное окно Windows-приложения.

Поэтому одним из авторов написано Windows-приложение [36], моделирующее вертикальные колебания небольшого шара, подвешенного на пружине в среде с учётом силы вязкого трения, линейно зависящей от скорости, и силы Архимеда. Также можно включить гармоническую внешнюю вынуждающую силу. Параметры колебательной системы и начальные условия варьируются в широких пределах. Приложение снабжено справочными материалами по теории представленного эксперимента. Программа работает в операционных средах Windows XP-10 и обладает простым, интуитивно понятным русскоязычным интерфейсом. Главное окно про-

граммы показано на рис. 15.

Параметры расчёта подобраны таким образом, чтобы показать возникновение слабо затухающих биений при небольшом сопротивлении среды. Здесь же следует отметить, что выполнить что-то подобное в натурном эксперименте с механической колебательной системой представляется весьма проблематичным.

Реальный эксперимент. На просторах Интернета можно найти немало экспериментов разного качества по физике, в том числе и на заданную тему. К числу лучших относится цикл опытов, подготовленных Валерианом Ивановичем Гервидсом в НИЯУ МИФИ. В частности, «Биения на камертонах» можно посмотреть здесь [37]. Существует старый, но весьма добротный фильм «Вынужденные колебания механических систем» [38]. Также к числу выдающихся демонстраторов можно отнести Радия Павловича Кренциса (в УГТУ-УПИ), демонстрационная установка которого [39], показанная на рисунке 16, иллюстрирует рассмотренное явление.

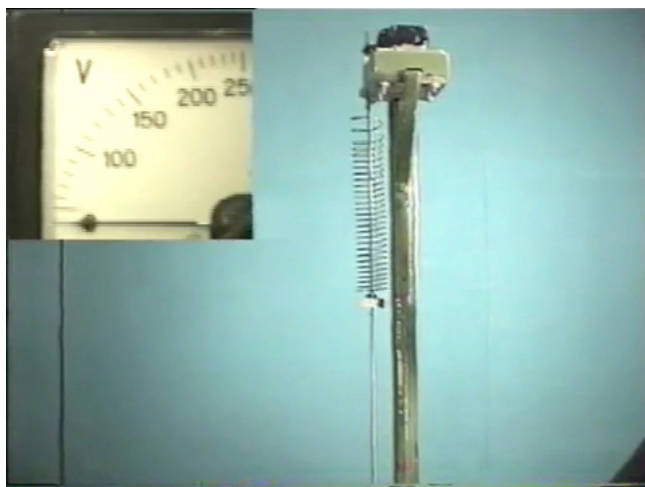


Рисунок 16 – Демонстрация резонанса. Фото [39]

ВЫВОДЫ

Представленный материал используется в лекционных курсах «Механика» и «Классическая механика» в процессе преподавания физики в нашем Университете. Компьютерный эксперимент применяется как лекционная демонстрация при изучении тех же курсов, а также «Практикума по компьютерному моделированию физических задач» и в качестве лабораторной работы.

Надемся, что нам удалось исправить ошибки, допущенные в литературе при историческом описании явления. Также полагаем, что детальное описание тонких физических моментов этого процесса будет полезно не только преподавателям вузов и учителям физики, но и школьникам. Виртуальная модель позволяет продемонстрировать практически все случаи, связанные с вынужденными колебаниями, причём в онлайн-режиме.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ:

1. Галич А. Закон природы (Подражание Беранже) / 1963. [Электронный ресурс]. URL: <http://www.bards.ru/archives/part.php?id=4086>.
2. Грот Голицына в Новом Свете — место, где возможно пел Шалапин // [Электронный ресурс]. URL: <https://krutania.ru/grot-shalyapina-povuy-svet/>.
3. Новый Свет (Крым) // [Электронный ресурс]. URL: [https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%9D%D0%B9_%D0%A1%D0%B2%D0%B5%D1%82_\(%D0%9A%D1%80%D1%8B%D0%BC\)](https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%9D%D0%B9_%D0%A1%D0%B2%D0%B5%D1%82_(%D0%9A%D1%80%D1%8B%D0%BC)).
4. Грот Шалапина. Крым. «Новый свет» // [Электронный ресурс]. URL: https://www.youtube.com/watch?time_continue=3&v=1TZI-67j3KkY.
5. Николай Басков силой голоса бьёт бокалы // 24.11.2004. [Электронный ресурс]. URL: <https://www.hab.kp.ru/daily/23410/34372/>.
6. Галилео. Эксперимент. Разбить бокал резонансом // 15.11.2012. [Электронный ресурс]. URL: https://www.youtube.com/watch?time_continue=2&v=ThL42zpCYI8.
7. Scodary Anthony, Shattering a Wine Glass with Sound // December 9, 2007. [Электронный ресурс]. URL: <http://large.stanford.edu/courses/2007/ph210/scodary2/>.

8. Мякишев Г. Я. Физика. Колебания и волны. 11 кл. Профильный уровень: учеб. для общеобразоват. учреждений / Г. Я. Мякишев, А. З. Синапов. 9-е изд., стереотип. — М.: Дрофа, 2010. 287 с.
9. Касьянов В. А., Физика. 10 кл. Профильный уровень / В. А. Касьянов — М.: Дрофа, 2013. — 428 с.
10. Громов С. В. Физика: Механика. Теория относительности. Электро-динамика: учеб. для 10 кл. общеобразоват. учреждений: профиль. уровень / С. В. Громов, Н. В. Шаронова; под ред. Н. В. Шароновой. — 8-е изд., доп. и перераб. — М.: Просвещение, 2007. 415 с.
11. Газета «Новости дня» 03 февраля (21 января) 1905 года // [Электронный ресурс]. URL: <http://starosti.ru/article.php?id=7878>.
12. Провал Египетского моста через Фонтанку в Петербурге 20-го января с.г. По фот. К. Булла // [Электронный ресурс]. URL: <https://spbarchives.ru/infres/-archive/cgakkf/photo/36265>.
13. Доклад подготовительной комиссии с заключением экспертов о причинах обрушения Египетского моста через Фонтанку. 1906. ЦГИА СПб // [Электронный ресурс]. URL: <https://spbarchives.ru/documents/10157/539463/4.jpg?t=1409042011667>.
14. This Month in Physics History. November 7, 1940: Collapse of the Tacoma Narrows Bridge // [Электронный ресурс]. URL: <https://www.aps.org/publications/apsnews/201611/physicshistory.cfm>.
15. K. Billah and R. Scanlan, "Resonance, Tacoma Narrows Bridge Failure and Undergraduate Physics Textbooks," Am. J. Phys. 59, 118 (1991). // [Электронный ресурс]. URL: <http://www.ketchum.org/billah/Billah-Scanlan.pdf>.
16. Tacoma Narrows Bridge destruction // [Электронный ресурс]. URL: <https://archive.org/details/Pa2096Tacoma>.
17. Pierre-Louis Augereau. Angers mystérieux. / 2000. [Электронный ресурс]. URL: https://books.google.ru/books?id=XUOG9pH7TIQC&pg=PA84&dq=Pont+de+la+Basse-Cha%C3%A9ne&hl=ru&sa=X&ved=0ahUKEw_jMPLbgYfAhVBxaYKHUUYCQAQ6AEIwzAH#v=onepage&q=Pont%20de%20la%20Basse-Cha%C3%A9ne&f=false.
18. La rupture du Pont de la Basse-Chaîne à Angers en 1900. // [Электронный ресурс]. URL: [https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Pont_de_la_Basse-Cha%C3%A9ne_\(7\).jpg](https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Pont_de_la_Basse-Cha%C3%A9ne_(7).jpg).
19. Broughton Suspension Bridge // [Электронный ресурс]. URL: https://en.wikipedia.org/wiki/Broughton_Suspension_Bridge.
20. Broughton Suspension Bridge // [Электронный ресурс]. URL: <https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Broughton-suspension-bridge.jpg>.
21. Резонанс — друг и враг // 19 марта 2013 года. [Электронный ресурс]. URL: <https://kpi.ua/ru/node/7028>.
22. London Millenium Footbridge // [Электронный ресурс]. URL: https://en.wikipedia.org/wiki/Millennium_Bridge,_London.
23. Морозов А. Г. Почему танцевал мост? И как ему запретили танцевать в будущем? // 10 января 2019. [Электронный ресурс]. URL: <https://otragniya.livejournal.com/1051697.html>.
24. Танцующий мост в Волгограде // [Электронный ресурс]. URL: https://www.youtube.com/watch?time_continue=4&v=X62X7cLzNFU.
25. Igor Belykh, Russell Jeter and Vladimir Belykh. Foot force models of crowd dynamics on a wobbly bridge // Science Advances, Vol. 3, № 11, 01 November 2017. [Электронный ресурс]. URL: <https://advances.sciencemag.org/content/3/11/e1701512>.
26. Шли бы в ногу — мост бы рухнул // 18 июля 2016 / [Электронный ресурс]. URL: <https://fishki.net/video/2016050-shli-by-v-nogu-most-by-ruhnul.html>.
27. Колебания автомобильного моста во время движения крестного хода. Город Екатеринбург // 17 июля 2016 / [Электронный ресурс]. URL: https://www.youtube.com/watch?time_continue=1&v=fUCvWHntstI.
28. Строевой устав Вооруженных Сил Российской Федерации. Введен в действие Приказом Министра обороны Российской Федерации от 11 марта 2006 г. № 111. [Электронный ресурс]. URL: <https://ruls.ru/acts/Stroevoy-ustav-Vooruzhennyh-Sil-Rossiyskoy-Federatsii/>.
29. English-Russian dictionary of military terms. Англо-Русский словарь военных терминов // 2012. [Электронный ресурс]. URL: <https://slovar-vocab.com/english-russian/vocab-military-terms/route-step-1086857.html>.
30. MythBusters. Break Step Bridge. (Разрушители легенд. Сезон 1. Серия 11. Шаги, разрушающие мост) // 2004. [Электронный ресурс]. URL: <https://www.youtube.com/watch?v=H1415XIk9gw>.
31. Физическая энциклопедия Т.4. / М.: изд-во «Большая Российская энциклопедия», 1994.
32. Сивухин Д. В. Общий курс физики. Учеб. пособие: Для вузов. В 5 т. Т. III. Электричество. — 4-е изд., стереот. — М.: ФИЗМАТЛИТ; Изд-во МФТИ, 2004. — 656 с.
33. Бобылёв, Ю. В. Механика. Курс лекций: учебное пособие / Ю. В. Бобылёв, А. И. Грибков, В. А. Панин, Р. В. Романов. — Тула: Изд-во ТГПУ им. Л. Н. Толстого, 2014. — 300 с. [Электронный ресурс]. URL: <https://e.lanbook.com/book/111875>.
34. Физическая энциклопедия Т.1. / М.: изд-во «Большая Российская энциклопедия», 1988.
35. Бобылёв Ю. В., Грибков А. И., Романов Р. В. Формирование математической культуры при решении физических задач в Mathcad // Высшее образование в России: история и современность: коллективная монография / отв. ред. А.Ю. Нагорнова. — Ульяновск: Зебра, 2017. С.232-248. <https://elibrary.ru/item.asp?id=29934947>.
36. Романов Р. В. Моделирование колебаний шара на пружине в вязкой среде с учётом вынуждающей силы // Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ №2018660501. Дата государственной регистрации в Реестре программ для ЭВМ

23 августа 2018. http://www1.fips.ru/wps/PA_FipsPub/res/BULLETIN/PrEVM/2018/09/20/INDEX.HTM.

37. Биение на камертонах / НИЯУ МИФИ. [Электронный ресурс]. URL: <https://www.youtube.com/watch?v=gfC3HXepxE>.

38. Вынужденные колебания механических систем / Киевнаучфильм, 1974. [Электронный ресурс]. URL: <https://www.youtube.com/watch?v=RhMrfBksfNY>.

39. Свободные и вынужденные колебания / [Электронный ресурс]. URL: <https://www.youtube.com/watch?feature=plpp&v=093CzGsstv0>.

Статья поступила в редакцию 02.04.2020

Статья принята к публикации 27.11.2020