

УДК 624.071.22:531.62
DOI: 10.46548/21vek-2021-1056-0023

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ РАБОТЫ НИТЕЙ КОНЕЧНОЙ ЖЕСТКОСТИ ПРИ УДАРНОМ ВОЗДЕЙСТВИИ

© 2021

Тарасов Денис Александрович, кандидат технических наук,
доцент кафедры «Автоматизация и управление»

Волков Владимир Васильевич, кандидат технических наук, профессор,
заведующий кафедрой «Автоматизация и управление»

Аксенова Елена Александровна, старший преподаватель кафедры «Автоматизация и управление»

Пензенский государственный технологический университет

(440039, Россия, Пенза, проезд Байдукова/ул. Гагарина, д. 1а/11,

e-mails: tarasov.denis.penza@gmail.com, volkovv@penzgtu.ru, nsn@penzgtu.ru)

Аннотация. Предложена методика, позволяющая моделировать при действии поперечной кратковременной динамической нагрузки напряженно-деформированное состояние нитей, обладающих некоторой изгибной жесткостью. Исследования проведены на основе общей теоремы динамики, а именно закона сохранения энергии, а также положений сопротивления материалов, математического моделирования с использованием аппарата дифференциального и интегрального исчисления функций одной и нескольких переменных. В результате расчета кроме распределения напряжений и деформаций по длине нити определяется значение эквивалентной статической нагрузки удара, возникающему за счет кинетической энергии ударяющего тела, взаимодействующего с конструкцией. Данная нагрузка ограничена исходным количеством кинетической энергии тела, а ее величина и закон изменения от времени зависят от физических и геометрических параметров нити конечной жесткости. Использование в проектно-конструкторской деятельности разработанной методики позволит корректно решать задачи по расчету элементов, моделью которых является нить, обладающая некоторой изгибной жесткостью. Это повысит надежность изделий разработанных с применением таких элементов. Вместе с тем может привести к более широкому внедрению конструкций, работающих преимущественно на растяжение с частичным восприятием изгибающих моментов при обеспечении общей прочности той или иной механической системы при внешнем воздействии.

Ключевые слова: изгибная жесткость, нить, удар, напряжения, деформации.

MATHEMATICAL MODELING OF THE OPERATION OF BENDED RIGID THREADS UNDER IMPACT

© 2021

Tarasov Denis Aleksandrovich, candidate of technical sciences,
associate professor of the Department "Automation and Control"

Volkov Vladimir Vasilievich, candidate of technical sciences, professor,
head of the Department "Automation and Control"

Aksenova Elena Aleksandrovna, senior lecturer of the Department "Automation and Control"

Penza State Technological University

(440039, Russia, Penza, Baidukova proezd / ul. Gagarina, 1a/11,

e-mails: tarasov.denis.penza@gmail.com, volkovv@penzgtu.ru, nsn@penzgtu.ru)

Abstract. A technique is proposed that makes it possible to simulate the stress-strain state of threads with a certain bending stiffness under the action of a transverse short-term dynamic load. The studies were carried out on the basis of the general theorem of dynamics, namely the law of conservation of energy, as well as the provisions of the resistance of materials, mathematical modeling using the apparatus of differential and integral calculus of functions of one and several variables. As a result of the calculation, in addition to the distribution of stresses and strains along the length of the thread, the value of the equivalent static load to the impact arising from the kinetic energy of the impacting body interacting with the structure is determined. This load is limited by the initial amount of kinetic energy of the body, and its value and the law of change with time depend on the physical and geometric parameters of the thread of finite rigidity. The use of the developed methodology in design and development will allow to correctly solve the problems of calculating elements, the model of which is a thread with a certain bending stiffness. This will increase the reliability of products designed using such elements. At the same time, it can lead to a wider introduction of structures operating mainly in tension with partial perception of bending moments while ensuring the overall strength of a particular mechanical system under external influence.

Keywords: bending stiffness, thread, impact, stresses, deformations.

Введение. На сегодняшний день вопросы математического моделирования работы гибких нитей при действии произвольных поперечных нагрузок достаточно широко освещены [1, 2]. Гибкая нить является

расчетной моделью для несущих элементов таких механических систем как контактные провода электрифицированных железных дорог, стальные канаты воздушных линий электропередач, канатных дорог и

кабель-кранов [3, 14]. Однако техническая сложность реализации опорных и узлов сопряжения, а также ограниченная доступность стальных канатов ведет к их замене горячекатаными профилями. Это особенно актуально для ограждений безопасности автомобильных дорог и противотаранных заграждений территорий особо важных объектов, где высока вероятность наезда транспортных средств [4, 5]. В указанных инженерных сооружениях в качестве конструкций, обеспечивающих общую прочность изделий при ударном воздействии, часто используют стальные полосы, прямоугольные профили и двутавры хорошо работающие как на растяжение, так и на изгиб. В связи с этим гибкая нить, способная воспринимать только растягивающие усилия, не может выступать в качестве расчетной модели, поскольку не отражает реальной работы перечисленных элементов. Таким образом, для определения истинных напряжений и деформаций необходимо рассматривать нить с учетом изгибной жесткости [6].

Целью данного исследования является разработка методики, позволяющей моделировать работу при ударном воздействии нитей, обладающих некоторой изгибной жесткостью.

Материалы и результаты исследования. Рассмотрим нить конечной жесткости пролетом l , подверженной горизонтальному поперечному удару телом, имеющим массу m и скорость v в первоначальный момент соударения [7]. В процессе удара скорость за очень короткий промежуток времени изменяется и в конце взаимодействия падает до нуля, следовательно, на ударяющее тело действует кратковременная сила инерции [8]. По закону равенства действующих и противодействующих сил на нить передается такая же сила, но обратно направленная, обозначим ее q [9]. Расчетная модель представлена на рисунке 1.

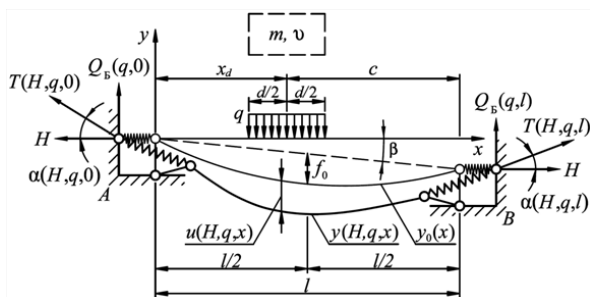


Рисунок 1 – Расчетная модель изгибно-жесткой нити

Нити конечной жесткости являются конструктивными элементами способными при внешнем силовом воздействии воспринимать, как растягивающие усилия, так и изгибающие моменты, иначе говоря, совмещать работу гибкой нити и балки [10]. Если рассматривать гибкую нить, то любая нагрузка заставляет ее принимать очертание эпюры изгибающих моментов шарнирно опертой однопролетной балки тем же пролетом и нагруженной точно так же, как и рассматриваемый элемент [11-13]. В связи с этим внутренние усилия, возникающие от силы инерции, приложенной в виде нагрузки q , будем называть «балочными» и обозначать с индексом «Б». В свою очередь нить,

обладающая изгибной жесткостью, сопротивляется принимать указанное очертание, поскольку воспринимает часть «балочного» момента. Поэтому ту часть внутренних усилий, которую воспринимает нить конечной жесткости, условимся обозначать с индексом « H ».

Допустим, что кинетическая энергия ударяющего тела переходит полностью в потенциальную энергию деформации изгибно-жесткой нити:

$$\Delta\left(\frac{m \cdot v^2}{2}\right) = \int_0^l \frac{M_H(H, q, x)^2}{2 \cdot E \cdot J} dx + \int_0^l \frac{T(H, q, x)^2}{2 \cdot E \cdot A} dx + \int_0^l \frac{k \cdot Q_H(H, q, x)^2}{2 \cdot G \cdot A} dx, \quad (1)$$

где l – пролет, м; $M_H(H, q, x)$ – функция изгибающего момента, Н·м; E – модуль упругости, Па; J – момент инерции сечения, м⁴; $T(H, q, x)$ – функция растягивающего продольного усилия, Н; A – площадь поперечного сечения, м²; k – коэффициент характеризующий форму поперечного сечения; $Q_H(H, q, x)$ – функция поперечной силы, Н; G – модуль сдвига, Па.

В уравнении (1) в параметры функций внутренних усилий добавлена статическая нагрузка q – эквивалент силы инерции ударяющего тела. Это обусловлено тем, что неизвестно время соударения, а значит величина ускорения и соответственно силы инерции. Вместе с тем в параметры функций добавлен распор H – горизонтальная составляющая растягивающего нить продольного усилия, так как он также неизвестен на момент взаимодействия.

Момент, возникающий в изгибно-жесткой нити, можно определить с помощью приближенной теории изгиба прямолинейных брусьев [15]:

$$M_{\text{H}}(H, q, x) = E \cdot J \cdot \frac{d^2}{dx^2} u(H, q, x), \quad (2)$$

где $u(H, q, x)$ – функция перемещений, м.

Известно, что существует дифференциальная зависимость между изгибающим моментом и поперечной силой [16]:

$$Q_H(H, q, x) = \frac{d}{dx} M_H(H, q, x). \quad (3)$$

В любой точке по длине нити конечной жесткости растягивающее продольное усилие равно сумме проекций балочной поперечной силы и распора на касательную к линии конечного очертания. Математически это записывается так:

$$T(H, q, x) = Q_B(q, x) \cdot \sin \alpha(H, q, x) + H \cdot \cos \alpha(H, q, x), \quad (4)$$

где $Q_B(q, x)$ – функция балочной поперечной силы, Н; $\alpha(H, q, x)$ – угол между касательной в произвольной точке к линии конечного очертания изгибно-жесткой нити и осью абсцисс, град.

Функции балочной поперечной силы и балочного изгибающего момента от инерционной нагрузки и координаты представим в виде [17]:

$$\begin{aligned} Q_5(q, x) &= \frac{q \cdot d \cdot c}{l} \cdot (x \geq 0) - \\ &- q \cdot \left[x - \left(x_d - \frac{d}{2} \right) \right] \cdot \left(x > x_d - \frac{d}{2} \right) + \\ &+ q \cdot \left[x - \left(x_d + \frac{d}{2} \right) \right] \cdot \left(x > x_d + \frac{d}{2} \right) \end{aligned} \quad (5)$$

$$M_B(q, x) = \frac{q \cdot d \cdot c}{l} \cdot x \cdot (x \geq 0) -$$

$$- q \cdot \frac{\left[x - \left(x_d - \frac{d}{2} \right) \right]^2}{2} \cdot \left(x > x_d - \frac{d}{2} \right) +,$$

$$+ q \cdot \frac{\left[x - \left(x_d + \frac{d}{2} \right) \right]^2}{2} \cdot \left(x > x_d + \frac{d}{2} \right) \quad (6)$$

где d – ширина зоны соударения, м; c – расстояние от центра зоны соударения до опоры B , м; x_d – абсцисса центра зоны соударения, м.

Тригонометрические функции угла между касательной в произвольной точке к линии конечного очертания изгибно-жесткой нити и осью абсцисс определяются по выражениям:

$$\sin \alpha(H, q, x) = \frac{\frac{d}{dx}(y(H, q, x) - x \cdot \operatorname{tg} \beta)}{\sqrt{1 + \left(\frac{d}{dx}(y(H, q, x) - x \cdot \operatorname{tg} \beta) \right)^2}};$$

$$\cos \alpha(H, q, x) = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{d}{dx}(y(H, q, x) - x \cdot \operatorname{tg} \beta) \right)^2}} \quad (7)$$

$$\cos \alpha(H, q, x) = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{d}{dx}(y(H, q, x) - x \cdot \operatorname{tg} \beta) \right)^2}} \quad (8)$$

где $y(H, q, x)$ – функция линии конечного очертания, м; β – угол наклона хорды AB , соединяющей точки крепления, град.

Из расчетной модели, представленной на рисунке 1 видно, что функция линии конечного очертания равна сумме двух слагаемых:

$$y(H, q, x) = y_0(x) + u(H, q, x), \quad (9)$$

где $y_0(x)$ – функция линии начального очертания, м.

Линия начального очертания представляет собой квадратичную функцию [18]:

$$y_0(x) = \frac{4 \cdot f_0}{l^2} \cdot x^2 - \frac{4 \cdot f_0}{l} \cdot x, \quad (10)$$

где f_0 – первоначальная стрела провеса, м.

Для нахождения функции перемещений запишем уравнение моментов, взятое в произвольном сечении по длине изгибно-жесткой нити:

$$E \cdot J \cdot \frac{d^2}{dx^2} u(H, q, x) - M_B(q, x) +$$

$$+ H \cdot (y_0(x) + u(H, q, x)) = 0 \quad (11)$$

Для раскрытия неопределенности относительно распора и создания возможности для дальнейшего решения дифференциального уравнения (11) относительно перемещений, воспользуемся условием совместности деформаций, связывающим длины нити в деформированном и исходном состоянии [19]:

$$L_0 + \Delta L(H, q) = L(H, q), \quad (12)$$

где L_0 – начальная длина, м; $\Delta L(H, q)$ – упругая деформация, м; $L(H, q)$ – конечная длина, м.

Длина нити конечной жесткости до приложения нагрузок равна:

$$L_0 = \int_0^l \sqrt{1 + \left(\frac{d}{dx}(y_0(x) - x \cdot \operatorname{tg} \beta) \right)^2} dx. \quad (13)$$

В результате ударного воздействия происходит удлинение на величину:

$$\Delta L(H, q) = \frac{H}{E \cdot A} \times$$

$$\times \int_0^l \left[1 + \left(\frac{Q_B(q, x) - Q_H(H, q, x)}{H} + \operatorname{tg} \beta \right)^2 \right] dx. \quad (14)$$

Длина в деформированном состоянии определяется по выражению:

$$L(H, q) = \int_0^{l - \frac{2}{k} H} \sqrt{1 + \left(\frac{d}{dx}(y(H, q, x) - x \cdot \operatorname{tg} \beta) \right)^2} dx, \quad (15)$$

где k – жесткость упругоподатливых опор, Н/м.

После того как решена одним из численных методов система, состоящая из двух трансцендентных уравнений (1) и (12) с двумя неизвестными, появляется возможность определить нормальные напряжения, возникающие в изгибно-жесткой нити.

Минимальные нормальные напряжения равны:

$$\sigma_{\min}(x) = \frac{T(H, q, x)}{A} - \left| \frac{M_H(H, q, x)}{W} \right|, \quad (16)$$

где W – момент сопротивления сечения, м³.

Максимальные нормальные напряжения определяются по выражению:

$$\sigma_{\max}(x) = \frac{T(H, q, x)}{A} + \left| \frac{M_H(H, q, x)}{W} \right|. \quad (17)$$

Заключение. Использование в проектно-конструкторской деятельности разработанной методики и реализованной с помощью численных схем решения в виде проблемно-ориентированного программного комплекса [20], позволит корректно решать задачи по расчету элементов, моделью которых является нить, обладающая некоторой изгибной жесткостью. Это повысит надежность изделий разработанных с применением таких элементов. Вместе с тем может привести к более широкому внедрению конструкций, работающих преимущественно на растяжение с частичным восприятием изгибающих моментов при обеспечении общей прочности той или иной механической системы при внешнем воздействии.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ:

1. Тарасов, Д. А. Алгоритм моделирования поведения вращающейся гибкой нити в упругопластическом состоянии / Д. А. Тарасов, Н. Ю. Митрохина, Э. М. Эркебаев // Модели, системы, сети в экономике, технике, природе и обществе. – 2021. – № 1(37). – С. 107-118. – DOI 10.21685/2227-8486-2021-1-9.
2. Кужахметова, Э. Р. Методы расчета вант и вантовых конструкций / Э. Р. Кужахметова // Вестник Белгородского государственного технологического университета им. В.Г. Шухова. – 2019. – № 2. – С. 39-48. – DOI 10.12737/article_5c73fc07ba7858.43737360.
3. Патент № 2694376 С1 Российская Федерация, МПК E06B 3/46, E06B 5/10, E06B 11/02. Противотаранные откатные ворота : № 2019102145 : заявл. 24.12.2018 : опубл. 12.07.2019 / А. А. Кодоров, Д. А. Тарасов, Г. С. Большаков [и др.] ; заявитель Закрытое акционерное общество "Центр специальных инженерных сооружений научно-исследовательского и конструкторского института радиоэлектронной техники" (ЗАО "ЦЕСИС НИКИРЭТ").
4. Патент на полезную модель № 191852 U1 Российская Федерация, МПК E01F 15/02, E04H 17/16. Противотаранное заграждение : № 2019113635 : заявл. 30.04.2019 : опубл. 26.08.2019 / Д. А. Тарасов, Г. С. Большаков, И. В. Васильев, О. Л. Шаповал ; заявитель Закрытое акционерное общество "Центр специальных инженерных сооружений научно-исследовательского и конструкторского института радиоэлектронной техники" (ЗАО "ЦЕСИС НИКИРЭТ").
5. Патент № 2668118 С1 Российская Федерация, МПК E01F 13/00. Габрион : № 2017140743 : заявл. 22.11.2017 : опубл. 26.09.2018 / И. В. Васильев, В. А. Сигаев, Д. А. Тарасов, О. Л. Шаповал ; заявитель Закрытое акционерное общество "Центр специальных инженерных сооружений научно-исследовательского и конструкторского института радиоэлектронной техники" (ЗАО "ЦЕСИС НИКИРЭТ").
6. Захарова, Л. В. Об алгоритме вариационного метода для расчета упругой непоплой нити с учетом изгибной жесткости / Л. В. Захарова, М. В. Александровский // Вест-

ник Белгородского государственного технологического университета им. В.Г. Шухова. – 2017. – № 10. – С. 84-89. – DOI 10.12737/article_59cd0c5bd4bef4.35068893.

7. Математическое моделирование напряженно-деформированного состояния гибкой нити при действии поперечного удара / В. В. Коновалов, Д. А. Тарасов, В. Ю. Зайцев, Ю. В. Родионов // Проблемы управления и моделирования в сложных системах : Труды XXI Международной конференции. В 2-х томах, Самара, 03–06 сентября 2019 года / Под редакцией С.А. Никитова, Д.Е. Быкова, С.Ю. Боровика, Ю.Э. Плешивцевой. – Самара: Общество с ограниченной ответственностью "Офорт", 2019. – С. 313-317.

8. Mathematical Modeling of the Stress-Strain State of a Flexible Thread under the Action of Transverse Impact / V. Konovalov, V. Zaitsev, D. Tarasov, Y. Rodionov // Proceedings - 2019 21st International Conference "Complex Systems: Control and Modeling Problems", CSCMP 2019, Samara, 03–06 сентября 2019 года. – Samara: Institute of Electrical and Electronics Engineers Inc., 2019. – P. 470-474. – DOI 10.1109/CSCMP45713.2019.8976590.

9. Effect of deformation on the stress-strain state of a honey extraction centrifuge flexible thread / D. Tarasov, V. Konovalov, V. Zaitsev [et al.] // IOP Conference Series: Earth and Environmental Science : 12th International Scientific Conference on Agricultural Machinery Industry, INTERAGROMASH 2019, Rostov-on-Don, 10–13 сентября 2019 года. – Rostov-on-Don: Institute of Physics Publishing, 2019. – P. 012118. – DOI 10.1088/1755-1315/403/1/012118.

10. Кауров, П. В. Новый способ определения перемещений стержня малой жесткости при продольно-поперечном изгибе / П. В. Кауров, А. А. Тимофеев // Известия Петербургского университета путей сообщения. – 2011. – № 1(26). – С. 163-171.

11. Mathematical modeling of deformations of flexible threads under their dynamic loading in the zone of material plasticity / D. Tarasov, V. Konovalov, V. Zaitsev, Y. Rodionov // Journal of Physics: Conference Series, Tambov, 14–16 ноября 2018 года. – Tambov: Institute of Physics Publishing, 2019. – P. 012014. – DOI 10.1088/1742-6596/1278/1/012014.

12. Тарасов, Д. А. Исследование влияния пластических деформаций при моделировании напряженно-деформированного состояния гибкой нити / Д. А. Тарасов, А. В. Липов, А. М. Ирышков // Модели, системы, сети в экономике, технике, природе и обществе. – 2020. – № 1(33). – С. 98-110. – DOI 10.21685/2227-8486-2020-1-8.

13. Компьютерное моделирование определения реакций опор гибких барьеров / В. В. Коновалов, Д. А. Тарасов, В. Ю. Зайцев, Н. В. Байкин // Известия Самарской государственной сельскохозяйственной академии. – 2012. – № 3. – С. 72-79.

14. Тарасов, Д. А. Конструкция защитного сооружения от удара для железнодорожных переездов / Д. А. Тарасов, В. В. Коновалов, В. Ю. Зайцев // Региональная архитектура и строительство. – 2014. – № 1. – С. 111-117.

15. Аверин, А. Н. Малые колебания жесткой нити вблизи статического положения равновесия / А. Н. Аверин // Строительная механика и конструкции. – 2018. – № 2(17). – С. 53-66.

16. Mathematical modeling of the stress-strain state of flexible threads with regard to plastic deformations / D. Tarasov, V. Konovalov, V. Zaitsev, Y. Rodionov // Journal of Physics: Conference Series: 4, Tambov, 15–17 ноября 2017 года. – Tambov, 2018. – P. 012008. – DOI 10.1088/1742-6596/1084/1/012008.

17. Тарасов, Д. А. Математическое моделирование напряженно-деформированного состояния гибких нитей с учетом физической нелинейности / Д. А. Тарасов, Д. Ю. Семенов // Модели, системы, сети в экономике, технике, природе и обществе. – 2017. – № 3(23). – С. 175-185.

18. Tarasov, D. Modeling the stress state of a rotating flexible thread (cable) to optimize its speed / D. Tarasov, V. Konovalov, V. Zaitsev // Journal of Physics: Conference Series, Voronezh, 10–13 декабря 2019 года. – Voronezh, 2020. – P. 012089. – DOI 10.1088/1742-6596/1614/1/012089.

19. Виселева, Ю. О. Расчет жесткой нити методом Бубнова - Галеркина / Ю. О. Виселева, Е. В. Глыбина // Избранные доклады 60-й университетской научно-технической конференции студентов и молодых ученых, Томск, 24–25 апреля 2014 года / Томский государственный архитектурно-строительный университет. – Томск: Томский государственный архитектурно-строительный университет, 2015. – С. 412-415.

20. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2020667618 Российская Федерация. Программа моделирования работы изгибно-жестких нитей в упругопластическом состоянии при воздействии статических и динамических нагрузок : № 2020667024 : заявл. 18.12.2020 : опубл. 25.12.2020 / Д. А. Тарасов, П. А. Косяков, А. Л. Данилов, О. Л. Шаповал ; заявитель Закрытое акционерное общество «Центр специальных инженерных сооружений научно-исследовательского и конструкторского института радиоэлектронной техники» (ЗАО «ЦеСИС НИКИРЭТ»).

Статья поступила в редакцию 17.10.2021

Статья принята к публикации 07.12.2021