УДК 378:512.14
DOI: 10.26140/anip-2021-1001-0040

ПРИМЕНЕНИЕ ПОНЯТИЯ «КОРЕНЬ N-ОЙ СТЕПЕНИ» ПРИ РЕШЕНИИ КУБИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ. ФОРМУЛА КАРДАНО

SPIN: 3906-0853
AuthorID: 708370
ResearcherID: Г-2130-2017
ORCID: 0000-0002-9533-5406
КОШЕЛЕВА Наталья Николаевна, кандидат педагогических наук, доцент кафедры «Высшая математика и математическое образование»
ORCID: 0000-0002-0003-3051
ЗАХАРОВА Динара Замировна, магистрант кафедры «Высшая математика и математическое образование»
Тольяттинский государственный университет
(445020, Россия, Тольятти, улица Белорусская, 14, e-mail: shonca@mail.ru)

Аннотация. Основная задача обучения математике в общеобразовательной школе заключается в обеспечении прочного и сознательного овладения учащимися системой математических знаний и умений, необходимых в повседневной жизни и трудовой деятельности каждому члену современного общества, достаточных для изучения смежных дисциплин и продолжения образования. Наряду с решением основной задачи, углубленное изучение математики предусматривает формирование у учащихся устойчивого интереса к предмету, выявление и развитие их математических способностей. Углубленное изучение предмета должно обеспечить подготовку к поступлению в ВУЗ и продолжению образования, а также к профессиональной деятельности, требующей достаточно высокой математической культуры. Тема «Корень n-ой степени» необходима для изучения многих разделов алгебры, а именно для нахождения производной и первообразной. В статье рассматривается решение кубических уравнений с использованием формулы Кардано. Описывается алгоритм применения данной формулы, ее основные преимущества. Обосновывается целесообразность её применения при решении кубических уравнений. Авторами приводятся примеры с подробным решением. Показано, что использование формулы Кардано способствует гораздо лучшему усвоению нового материала, повышает уровень мотивации обучающихся и вызывает их интерес к изучению предмета.

Ключевые слова: степенная функция, корень n-ой степени, кубическое уравнение, формула Кардано, Сципион дель Ферро, Никколо Тарталье, приведённое кубическое уравнение, дискриминант кубического уравнения, действительные корни кубического уравнения.

THE CONCEPT OF “ROOT N-TH DEGREE” IN SOLVING CUBIC EQUATIONS. THE FORMULA OF CARDANO

KOSHELEVA Natalia Nikolaevna, candidate of pedagogical sciences, associate professor of the chair “Higher mathematics and mathematical education”
ZAKHAROVA Dinara Zamirovna, Master of the Department “Higher Mathematics and Mathematical Education”
Tolyatti State University
(445020, Russia, Tolyatti, Belorusskaya Street, 14, e-mail: abilevaz@gmail.com)

Abstract. The main task of teaching mathematics in secondary schools is to ensure that students have a solid and conscious mastery of the system of mathematical knowledge and skills necessary in everyday life and work for each member of modern society, sufficient to study related disciplines and continue their education. Along with solving the main problem, advanced study of mathematics provides for the formation of students ‘ sustained interest in the subject, the identification and development of their mathematical abilities. In-depth study of the subject should provide preparation for entering the UNIVERSITY and continuing education, as well as for professional activities that require a sufficiently high mathematical culture. The topic “Root of the nth degree” is necessary for the study of many sections of algebra, namely, to find the derivative and primitive. The article deals with the solution of cubic equations using the Cardano formula. The algorithm for applying this feature is described.

Keywords: power function, root of nth degree, cubic equation, Cardano formula, Scipio del ferro, Niccolo Tartaglier, reduced cubic equation, discriminant of cubic equation, real roots of cubic equation.

Ни одно научное открытие не носит имени своего истинного автора.
Принцип Арнольда (открыт С. Стиглером)

ВВЕДЕНИЕ

Тема «Корень n-ой степени» является основой для изучения многих тем в курсе алгебры и начал математического анализа общеобразовательной школы. Так понятие корня n-ой степени неразрывно связано с понятием степени с дробно–рациональным показателем. Эта тема в свою очередь важна при изучении материала, связанного с понятием производной и первообразной. Также знания свойств степени с рациональным показателем и арифметического корня n-ой степени позволяют решать степенные и иррациональные уравнения, неравенства и их системы [1]. Известно, что в заданиях ЕГЭ на профильном уровне присутствуют задания на знание понятия корня n-ой степени и его свойств, а именно:

- на решение иррациональных уравнений и неравенств;
- на преобразование числовых иррациональных выражений;
- на преобразование буквенных иррациональных выражений.

Успешная сдача экзамена предполагает хорошее знание исследуемой темы. В процессе изучения алгебры и начал математического анализа на профильном уровне в рамках темы «Степени и корни. Степенные функции» рассматриваются способы решения уравнений третьей и четвёртой степеней. Анализ действующих учебников для общеобразовательных учреждений показал, что только в учебном пособии А. Г. Мордковича «Алгебра и начала математического анализа. 11 класс» наиболее полно и понятно раскрыта тема «Корень n-ой степени» [2]. Здесь автор включает темы, направленные на углубленный уровень обучения, такие, как «Извлечение корней из комплексных чисел», «Преобразование иррациональных выражений» и рассматривает решение кубических уравнений с использованием формулы Кардано.

В 16 веке в Италии были популярны математические состязания, которые были больше похожи на дуэли между двумя математиками. Соревнующиеся должны были отправить друг другу одинаковое количество задач. Победителем становился тот из них, кто решал большее количество присланных заданий. Наряду с присвоением звания выдающегося математика победитель занимал место при дворе и становился очень обеспеченным человеком. На тот момент ученые уже могли решать квадратные уравнения. Правда, решались они не непосредственно, а при помощи геометрических построений. Так делал Евклид и арабские математики. Одной из популярных тем было выведение общей формулы для нахождения корней любого уравнения третьей степени, ведь в то время решать кубические уравнения никто не умел [3].

Первым предложил решение уравнения вида $x^3 + px = q$ профессор математики Болонского университета Сципион дель Ферро. Его ученик Антонио Фиоре попытался использовать способ, переданный ему учителем, в поединках математиков. И он послал вызов Никколо Тарталье на состязание по решению задач. Приложив огромные усилия, Тарталья сам нашёл такой способ и решил все тридцать задач, предложенных ему Фиоре. Сам же Фиоре не смог решить ни одной своей задачи, хотя владел методом дель Ферро. В 1545 году вышла в свет книга «Великое искусство, или об алгебраических правилах», автором которой был итальянский математик Джероламо Кардано. В этой книге появились общие формулы корней кубического уравнения, переданные ему Тартальей. Способ решения кубических уравнений навсегда вошел в историю математики как «формула Кардано». В настоящее время учёные признают первенство в решении кубического уравнения за дель Ферро. Тарталья переоткрыл формулу дель Ферро, Кардано же дал полную и исчерпывающую теорию решения любого уравнения третьей степени [4].

МЕТОДОЛОГИЯ

Вот как Джероламо Кардано (1501-1576) впервые описал формулу для нахождения корней кубического уравнения $x^3 + px = q$:

«Куб третьей части числа “вещей”, к которому ты прибавляешь квадрат половины числа из уравнения и берешь корень из всего полученного, — это квадратный корень, который ты используешь в одном случае, прибавляя половину числа, которое как раз умножал само на себя, в другом случае, вычитая ту же самую половину, и ты будешь иметь соответственно “бином” и “вычет”; затем вычти кубический корень из вычета из кубического корня из бинома и остаток от этого есть величина “вещи”» [5].

То есть, корни кубического уравнения $x^3 + px + q = 0$ можно найти по формуле:

$$x = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}}$$

Так выглядит известная формула Кардано. Решение кубическое уравнение вида $x^3 + px + q = 0$ начинается с вычисления дискриминанта - Δ, который находится по формуле: $\Delta = \left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3$.

В результате вычисления дискриминанта может возникнуть три ситуации:

1) $\Delta > 0$. Это означает, что кубическое уравнение имеет только один действительный корень, который можно найти по этой формуле и два сопряжённых комплексных корня;

2) $\Delta = 0$. Это означает, что кубическое уравнение имеет три действительных корня, два из которых совпадают;

3) $\Delta < 0$. Это означает, что кубическое уравнение имеет три действительных корня, которые равны удвоенным действительным частям трёх кубических корней из комплексного числа

$$-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}.$$ [6]

Когда же можно применить данную формулу? Конечно, целесообразно её применять, если кубическое уравнение не имеет рациональных корней. В случае, если корень рациональный, то можно подобрать этот корень, затем делением свести исходное уравнение к квадратному.

Чтобы найти сопряженные комплексные корни уравнения, можно применить формулу Кардано для области комплексных чисел. Однако, в нашей статье мы не будем рассматривать применение данной формулы. Рассмотрим только нахождение действительных корней кубического уравнения.

Проиллюстрируем практическое применение формулы Кардано на примерах.

Пример 1. Решить уравнение:

$x^3 - 6x^2 - 6x - 2 = 0$

Решение. Заметим, что данное уравнение не приведённое. Значит, нам нужно привести его к виду:

$y^3 + py + q = 0$. Для этого произведём замену: $x = y + m$, где $m = -\frac{b}{3}$:

$x = y + 2.$

Получаем:

$$(y+2)^3 - 6(y+2)^2 - 6(y+2) - 2 = 0$$

$$y^3 + 6y^2 + 12y + 8 - 6y^2 - 24y - 24 - 6y - 14 = 0$$

$$y^3 - 18y - 30 = 0$$

Итак, мы имеем приведённое кубическое уравнение, где $p = -18$, $q = -30$. Найдём дискриминант этого уравнения по формуле:

$$\Delta = \left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3$$

$$\Delta = \left(-\frac{30}{2}\right)^2 + \left(-\frac{18}{3}\right)^3 = 225 - 216 = 9 > 0$$

$\Delta > 0$, значит уравнение имеет один действительный корень и два сопряжённых комплексных корня. Найдем действительный корень по формуле Кардано. Получаем:

$$y = \sqrt[3]{\frac{30}{2} + \sqrt{225 - 216}} + \sqrt[3]{\frac{30}{2} - \sqrt{225 - 216}}$$

$$y = \sqrt[3]{15 + 3} + \sqrt[3]{15 - 3}$$

$$y = \sqrt[3]{18} + \sqrt[3]{12}$$

Мы нашли корень приведённого уравнения. Вернёмся к замене.

Если $y = \sqrt[3]{18} + \sqrt[3]{12}$, то $x = y + 2 = \sqrt[3]{18} + \sqrt[3]{12} + 2$

$x = y + 2 = \sqrt[3]{18} + \sqrt[3]{12} + 2.$

Ответ: $\sqrt[3]{18} + \sqrt[3]{12} + 2$. [7]

РЕЗУЛЬТАТЫ

Итак, мы нашли действительный корень этого уравнения. Как мы писали выше, два оставшихся корня мы находить не будем, так как для этого требуется применить формулу Кардано для области комплексных чисел. А данная формула, на наш взгляд, выходит за рамки изучения алгебры и начал анализа даже в курсе углубленного изучения предмета в общеобразовательной школе.

Конечно, формула Кардано достаточно громоздкая, и её применение не всегда оправдано. Возникает вопрос: в каком же случае формула Кардано может быть полезна?

Например, при решении уравнений с параметром.

Пример 2. При каких значениях параметра а уравнение $x^3 + ax + 2 = 0$ имеет три различных корня?

Решение. Это приведённое кубическое уравнение. Оно может иметь три различных корня, если Δ<0. Найдём дискриминант Δ этого уравнения по формуле:

$$\Delta = \left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3.$$

Здесь $p = a, q = 2$. Получим:

$$\Delta = \left(\frac{2}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{3}\right)^3 = 1 + \frac{a^3}{27}$$

$$1 + \frac{a^3}{27} < 0 \Rightarrow 27 + a^3 < 0 \Rightarrow a^3 < -27 \Rightarrow a < -3$$

Значит, при $a < -3$ уравнение имеет три различных корня.

Ответ: при $a < -3$. [8]

ВЫВОДЫ

Анализ школьных работ показал, что учащиеся испытывают трудности в основном с применением свойств корня n-ой степени. Особенно они путаются в правильности применения того или иного свойства при преобразовании выражений, содержащих радикалы. Отметим, что особое значение имеет задание на нахождение области определения функции, так как от правильности нахождения ОДЗ зависит решение большинства уравнений и неравенств [9-25]. Ошибки в данном задании указывают на то, что не всеми учащимися усваивается понятие «корня n-ой степени из действительного числа» в полной мере. Стоит отметить, что у учащихся имеются ошибки при решении более сложных уравнений, содержащих радикалы (например – с введением новой переменной).

В заключении хочется отметить, что формула Кардано имеет место быть в углубленном курсе изучения алгебры общеобразовательной школы. Данная тема имеет скорее общеразвивающий характер, и будет интересна учащимся, обучающимся исключительно на углубленном уровне. Её можно рассмотреть в качестве дополнительного материала. Это связано с тем, что формула Кардано применяется крайне редко, к тому же она «тянет» за собой другую, ещё более сложную тему, связанную с нахождением корней из области комплексных чисел. А данная тема относится уже к высшей математике.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ:

1. *Кошелева Н.Н., Павлова Е.С., Захарова Д.З. Введение понятия «корень n-ой степени» в курсе алгебры общеобразовательной школы // «Математика и математическое образование»: сборник трудов IX Международной научной конференции «Математика. Образование. Культура». – Тольятти, ТГУ, - 24-26 апреля 2019.- С.233-237.*
2. *Мордкович А.Г. Алгебра и начала математического анализа. 11 класс. В 2 ч. ч. 1. Учебник для учащихся общеобразовательных организаций (базовый и углублённый уровни) / А. Г. Мордкович, П. В. Семенов. — 2-е изд., стер. — М.: Мнемозина, 2014. — 311 с.*
3. *Максимова О.Д. – История математики: учебное пособие для вузов. М.- Издательство «Юрайт», 2018-319 стр.*
4. *Борис Дружинин. Скандал давно минувших дней [Текст] / Борис Дружинин // Квантик. – 2014. - №7. – с. 20-24.*
5. *Вопросы математики, её истории и методики преподавания в учебно-исследовательских работах: матер. межрегион. науч.- практ. конф. студентов матем. фак-тов / ред. кол.: Ю.В. Корзнякова, И.В. Косолапова; под общ. ред. Ю.В. Корзняковой; Перм. гос. гуманит.-пед. ун-т. – Пермь, 2014. – Вып. 7. – 55 с.*
6. *Марасанов, А.Н. О методических аспектах проведения занятий по школьному спецкурсу «Математика» в профильных классах / А.Н. Марасанов // Современные проблемы прикладной математики и математического моделирования: Материалы II междунар. науч. конф. 11 -16 декабря 2007 г. – Воронеж, 2007. – С. 128-129.*
7. *Абылкасымова А.Е. Математические основы обучения решению задач в средней школе / А.Е. Абылкасымова, А.А. Папышев. – Алматы, 2004. – 124 с.*
8. *Рыжик В.И. Упростить? Нет ничего проще?! / В.И. Рыжик // Математика в школе. – 2012. – №1. – С. 31-37*
9. *Алгебра и начала математического анализа: учеб. для 10-11 кл. общеобразоват. учреждений / А.Н. Колмогоров, А.М. Абрамов, Ю.П. Дудницин и др.; под ред. А.Н. Колмогорова. – 17-е изд. – М.: Просвещение, 2008. – 384 с.*
10. *Васильева, Г.Н. Современные технологии обучения математике. Ч. 1 : учебное пособие / Г.Н. Васильева, В.Л. Пестерева. – Пермь: Пермский гос. гуманитарно-пед. ун-т, 2013. – 114 с*
11. *Далингер, В.А. Наглядные образы как средство решения математических задач / В.А. Далингер // Математика в школе. – 2007. – №7. – С. 26-31.*
12. *Иванова, Т.А. Теория и технология обучения математике в средней школе: Учеб. пособие для студентов математических специальностей педагогических вузов / Т.А. Иванова, Е.Н. Перевощикова, Л.И. Кузнецова, Т.П. Григорьева; под ред. Т.А. Ивановой. 2-е изд., испр. и доп. – Н. Новгород: НГПУ, 2009. – 355 с.*
13. *Капкаева, Л.С. Теория и методика обучения математике: частная методика. В 2 ч. Часть 1 : учеб.пособие для вузов / Л.С. Капкаева. – 2-е изд., испр. и доп. – М. : Издательство Юрайт, 2017. – 264 с.*
14. *Ланда, Л.Н. О формировании у учащихся общего метода мыслительной деятельности при решении задач / Л.Н. Ланда // Вопросы психологии. – 2003. – № 3. – С. 14-27.*
15. *Примерная основная образовательная программа основного общего образования [Электронный ресурс]. – URL : http://fgosreestr.ru/ (Дата обращения 12.04.2020)*
16. *Саранцев Г.И. Методика обучения математике в средней школе : Учеб. пособие для студентов мат. спец. пед. вузов и ун-тов / Г.И. Саранцев. – М.: Просвещение, 2002. – 224 с.*
17. *Старокожева Е.И. Курс лекций. Методика преподавания математики в основной школе [Электронный ресурс]. Лекция 8. Формирование алгоритмической культуры учащихся. 2008. // URL: http://refdb.ru/look/1393028-pall.html (Дата обращения 13.04.2020)*
18. *Кондаурова И.К., Залова Л.С. Развитие познавательного интереса к математике у студентов колледжа // Балканское научное обозрение. 2019. Т. 3. № 1 (3). С. 43-45.*
19. *Коновалова И.Н. Диалектическое единство теоретической и прикладной математики как основа профессионализации математической подготовки специалиста экономического профиля // Балтийский гуманитарный журнал. 2020. Т. 9. № 2 (31). С. 99-102.*
20. *Захарова Т.Г., Кондаурова И.К., Тугушева Э.Р. Организация профессионально ориентированной внеучебной деятельности будущих педагогов-математиков // Гуманитарные балканские исследования. 2019. Т. 3. № 1 (3). С. 21-25.*
21. *Шурыгин В.Ю., Шурыгина И.В. Активизация межпредметных связей физики и математики как средство формирования метапредметных компетенций школьников // Карельский научный журнал. 2016. Т. 5. № 4 (17). С. 41-44.*
22. *Кондаурова И.К., Батеева Е.Х. Профессионально ориентированное обучение математике в медико-биологическом лицее // Научный вектор Балкан. 2019. Т. 3. № 1 (3). С. 39-42.*
23. *Фирстова, Н.И. Методика формирования познавательных универсальных учебных действий при обучении методу тождественных преобразований на материале иррациональных выражений / Н.И. Фирстова // Конференциум АСОУ: сборник научных трудов и материалов научно-практических конференций. – 2015. – №1. – С. 3109-3120*
24. *Шмигирилова, И.Б.Теория и методика обучения математике в понятиях, схемах и таблицах: учебно-методическое пособие / И.Б. Шмигирилова. Петропавловск, 2007. – 161 с.*
25. *Coad J., Keith J. Curriculum continuity in mathematics: a case study of the transition from primary to secondary school // University of Southampton Centre for Research in Mathematics Education Working Paper, 1999. p.1-7.*

Статья поступила в редакцию 13.07.2020
Статья принята к публикации 27.02.2021