

УДК 629.1

DOI: 10.46548/21vek-2022-1157-0007

К ВОПРОСУ ПОСТРОЕНИЯ КОНЕЧНО-РАЗНОСТНЫХ МОДЕЛЕЙ ПЛАСТИНЧАТЫХ КОНСТРУКЦИЙ РЭС

©2022

Данилова Евгения Анатольевна, кандидат технических наук, доцент кафедры КиПРА
Танков Георгий Васильевич, кандидат технических наук, доцент, доцент кафедры КиПРА
Юрков Николай Кондратьевич, доктор технических наук, профессор, заведующий кафедрой КиПРА
Пензенский государственный университет
(440026, Россия, Пенза, улица Красная, 40, e-mails: siori@list.ru, g.tankov43@mail.ru, yurkov_nk@mail.ru)

Аннотация. В статье рассмотрены особенности применения методики математического моделирования при конструкторском проектировании радиоэлектронных средств (РЭС), работающих в условиях динамических внешних воздействий. Проанализированы значимость применения дискретных моделей и особенности их создания для исследования динамики определенных конструктивов электронной аппаратуры. Предложена концепция исследования простых моделей пластинчатых конструкций на основе применения метода конечных разностей для решения дифференциальных уравнений в частных производных. Рассмотрены геометрическая и расчетная модели пластины, показаны отличия в их построении при различных способах закрепления. Показаны особенности в разработке моделей по расчету собственных форм и частот изгибных колебаний пластин. В заключении приведены результаты исследования на этих моделях, проанализированы результаты, дано условие сходимости итерационного процесса, сделаны выводы. Полученные результаты могут стать основой для разработки методики расчета резонансных частот и форм колебаний пластинчатых конструкций радиоэлектронных средств.

Ключевые слова: математическое моделирование, конечно-разностный анализ, радиоэлектронное средство, частота и формы колебаний, разностная схема, платина, дискретная модель, печатная плата.

TO THE QUESTION OF CONSTRUCTION OF FINITE-DIFFERENCE MODELS OF PLATE STRUCTURES OF RADIO-ELECTRONIC EQUIPMENT

©2022

Danilova Evgenia Anatolievna, candidate technical science,
associate professor of the department «Design and Production of Radio Equipment»
Tankov Georgy Vasilievich, candidate technical science, associate professor,
associate professor of the department «Design and Production of Radio Equipment»
Yurkov Nikolai Kondratievich, doctor of technical sciences, professor,
head department «Design and production of radio equipment»
Penza State University

(440026, Russia, Penza, Krasnaya street, 40, e-mails: siori@list.ru, g.tankov43@mail.ru, yurkov_nk@mail.ru)

Abstract. The article discusses the features of the application of the mathematical modeling technique in the design of radio-electronic facilities operating under conditions of dynamic external influences. The significance of the use of discrete models and the peculiarities of their creation for the study of the dynamics of certain constructs of electronic equipment are analyzed. The concept of studying simple models of plate structures based on the application of the finite difference method for solving partial differential equations is proposed. The geometric and computational models of the plate are considered, the differences in their construction are shown for various methods of fastening. The features in the development of models for the calculation of natural forms and frequencies of bending vibrations of plates are shown. In conclusion, the results of the study on these models are presented, the results are analyzed, the condition for the convergence of the iterative process is given, and conclusions are drawn. The results obtained can become the basis for developing a methodology for calculating resonant frequencies and vibration modes of plate structures of radio electronic equipment.

Keywords: mathematical modeling, finite-difference analysis, radio-electronic means, frequency and modes of vibrations, difference scheme, platinum, discrete model, printed circuit board.

Введение. В современных РЭС плата, как несущий конструктив, занимает почти 60 % объема любого устройства. Несущая основа монтажной платы – пластина, часто стеклотекстолитовая, на которой размещаются электрорадиоэлементы.

Жесткость пластины в поперечном направлении (по толщине) намного меньше, чем в двух других направлениях, поэтому, если вектор внешнего воздей-

ствия перпендикулярен плоскости пластины, то при нестационарных внешних воздействиях в пластине могут возникать изгибные колебания значительной амплитуды (резонанс), и как следствие – значительные ускорения, которые могут превысить допустимые значения для установленных на плате электрорадиоэлементов.

Модели пластинчатых конструкций имеют боль-

шое значение при анализе динамики плат электронных средств на этапе предварительного проектирования, когда конструкция еще задана в чертежах.

Наибольшее распространение в практике инженерных расчетов получили применение дискретные модели, основанные на использовании численных (сеточных) методов, таких как метод конечных разностей (МКР) и метод конечных элементов (МКЭ) [1-3]. Для расчета конструкций сравнительно простых геометрических форм и однородных по структуре достаточно эффективным является использование МКР и построение на его основе конечно-разностных моделей [1, 4].

Материалы и результаты исследования. Применение современных информационных технологий в конструкторском проектировании требует разработки расчетных математических моделей РЭС, адекватных реальным условиям протекания физических процессов. Получение таких моделей, их исследование, совершенствование, анализ точности полученных с их помощью результатов, остаются актуальной научно-практической задачей, особенно с учетом того фактора, что математическое моделирование значительно дешевле натурального эксперимента.

Построение модели и расчетного алгоритма изгибных колебаний пластин. Одним из основных несущим элементом РЭС являются конструкции пластинчатого типа, к которым относят печатные платы, панели, шасси. Они выполняют различные функции, начиная от пространственной ориентации и размещения составных элементов, заканчивая обеспечением виброустойчивости и вибропрочности всего устройства при действии различных механических факторов, связанных с условиями эксплуатации. Поэтому динамические расчеты пластинчатых элементов занимают значительное место в оценке работоспособности конструкций РЭС подвижных объектов.

Как известно, наиболее опасной является ситуация, при которой происходит совпадение собственных частот пластинчатых конструкций с диапазоном частот объекта-носителя. В этой связи особое внимание уделяется задаче определения низших собственных форм и частот изгибных колебаний пластинчатых конструкций, так как наибольший отклик в конструкции отмечается именно на этих частотах.

Построение расчетной модели. Положим, что пластина имеет постоянную толщину. Изгибные колебания не вызывают в нейтральном слое деформации растяжения – сжатия. При колебаниях все точки пластины смещаются перпендикулярно к срединной плоскости до деформации. Все поперечные сечения остаются плоскими.

Задача определения собственных форм и частот колебаний пластинчатых конструкций РЭС относится к категории краевых задач математической физики. В основе краевой задачи лежит совокупность дифференциальных уравнений, краевых и начальных условий, которая однозначно определяет физический процесс, протекающий в заданной области и при за-

данных условиях.

Изгибные колебания пластин описываются дифференциальным уравнением технической теории изгиба [1, 5], в котором статическую нагрузку заменяют силой инерции:

$$D \left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \right) = -\rho \delta \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}, \quad (1)$$

где ρ – плотность материала, кг/м³; δ – толщина пластины, м; $w=w(x, y, t)$ – смещение текущей точки пластины по оси z ; D – цилиндрическая жесткость при изгибе пластины:

$$D = \frac{E \delta^3}{12(1-\nu^2)}.$$

Здесь E – модуль Юнга, Н/м²; ν – коэффициент Пуассона.

Уравнение (1), дополненное граничными и начальными условиями, будет являться математической моделью свободных, незатухающих колебаний пластины.

Построение расчетного алгоритма. Для решения задачи в общем случае – учет массы навесных элементов, расположенных произвольно, учет произвольных способов закрепления, характерных для конструкций РЭС, аналитические методы непригодны. Поэтому целесообразно использование метода конечных разностей для решения дифференциальных уравнений в частных производных.

Заменим сплошную пластину совокупностью дискретных элементов с шагом разбиения h_x по оси x с шагом h_y по оси y . Массу каждого дискретного элемента сосредоточим в его центре – узле, силы взаимодействия между элементами заменим упругими связями между узлами. Получим геометрическую дискретную модель пластины, состоящую из N узлов, соединенных упругими связями (рис. 1).

В модели можно выделить следующие узлы (рис. 1):

- граничные, расположенные на границе пластины;
- центральные (внутри пластины);
- контурные (вспомогательные, используемые для расчета узлов, находящиеся вблизи границы).

При жестком закреплении пластины вводим один ряд контурных узлов; для незакрепленной стороны пластины вводим два ряда вспомогательных контурных узлов (рис. 1).

В реальной конструкции при изгибе пластины каждая ее точка совершает сложное движение. Для упрощения принимаем, что каждый узел модели – сетки пластины перемещается только по нормали к плоскости пластины.

При колебаниях на первой резонансной частоте амплитуда колебания каждого узла максимальна, а закон движения – гармонический: перемещения каждого узла модели пластины изменяются по закону:

$$w=W(x,y)\sin\omega t, \quad (2)$$

где ω – собственная частота колебаний.

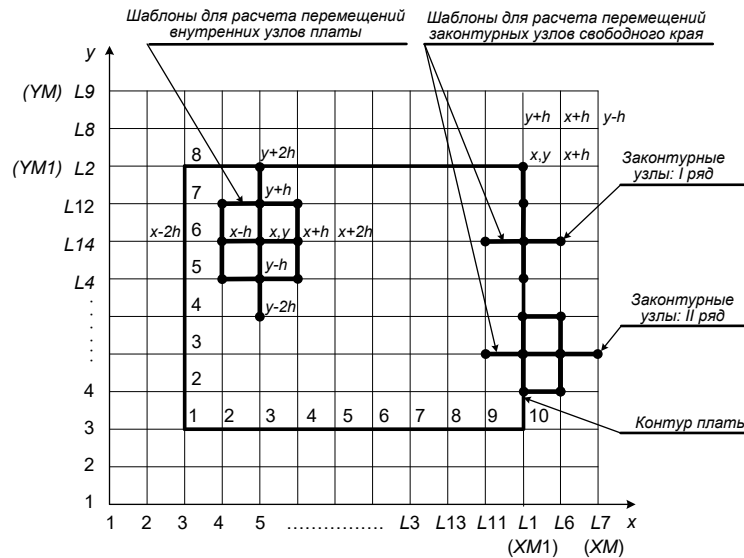


Рисунок 1 – Расчетное поле пластины. Законтурные узлы

Подставив (2) в (1), продифференцируем по времени правую часть; сократив на $\sin \omega t$ и поделив обе части полученного уравнения на цилиндрическую жесткость, получим разностное уравнение модели в виде:

$$\begin{aligned} & A1W(x+2, y) - A2W(x+1, y) + A3W(x, y) - A2W(x-1, y) + A1W(x-2, y) + \\ & + A4W(x+1, y+1) - A5W(x, y+1) + A4W(x-1, y+1) + A4W(x+1, y-1) - \\ & - A5W(x, y-1) + A4W(x-1, y-1) + A6W(x, y+2) + A6W(x, y-2) = \frac{\rho \delta \omega^2}{D} W(x, y) \end{aligned} \quad (3)$$

где $A1 = \frac{1}{h_x^4}$; $A2 = \frac{4}{h_x^4} + \frac{4}{h_x^2 h_y^2}$; $A3 = \frac{6}{h_x^4} + \frac{8}{h_x^2 h_y^2} + \frac{6}{h_y^4}$; $A4 = \frac{2}{h_x^2 h_y^2}$; $A5 = \frac{4}{h_x^2 h_y^2} + \frac{4}{h_y^4}$; $A6 = \frac{1}{h_y^4}$ – коэффициенты резонансного уравнения.

Используя разностный оператор, уравнение (3) можно записать в комплексном виде:

$$L(W) = \lambda W(x, y), \quad (4)$$

где $L(W)$ – левая часть (2), а $\lambda = \frac{\rho \delta \omega^2}{D}$ – собственный параметр.

Масса навесного элемента может быть учтена в модели в виде коэффициента плотности:

$$p_i = \frac{m_s}{h_x h_y \delta} + \rho_n, \quad (5)$$

где m_s – масса навесного элемента (или часть массы), относящегося к заданному узлу; h_x, h_y – шаги сетки по осям x, y ; δ – толщина плиты; ρ_n – плотность материала пластины.

Тогда уравнение (4) для центральных узлов запишется в виде:

$$L(W) = p_i \lambda W(x, y).$$

Для расчета перемещений в граничных узлах, которые обычно располагаются по контуру пластины, вводятся два ряда законтурных узлов (рис. 1), т.к. уравнение (3) содержит производные четвертого порядка, которые в разностной форме воспроизводятся на пятиточечном шаблоне. Значения прогибов в законтурных узлах вычисляются из граничных условий, которые определяются способом закрепления пластины. Аналитические выражения для случаев закрепления пластины [2] представляются в разностной форме.

Особый случай возникает при расчете угловых узлов свободного края (рис. 1). Для вычисления про-

гибов в узлах $(x+2, y)$, $(x, y+2)$ необходимо знать значение W в точке $(x+1, y+1)$. Его можно найти по интерполяционной формуле: $W(x+1, y+1) = W(x+1, y) + W(x, y+1) - W(x, y)$.

Для закрепленного края пластины в граничных узлах полагается $W(x, y) = 0$, а в законтурных узлах

$$W(x+1, y) = -KGW(x-1, y),$$

$$W(x, y+1) = -KGW(x, y-1)$$

где KG – коэффициент, учитывающий жесткость защемления: $0 \leq KGW \leq 1$. Значение $KG=0$ соответствует жесткому защемлению края, а $KG=1$ – свободному опиранию.

Если пластина закреплена винтами в определенных точках, то в соответствующих узлах полагается $W(x, y) = 0$.

Схема расчета. Для определения собственной формы колебаний и собственного параметра на основе вышеизложенного алгоритма строится итерационный процесс, который состоит в последовательном уточнении собственной частоты и форм колебаний, т.е. значений λ_n и $W(x, y)$, где λ_n – собственный параметр всей пластины.

Формула собственного параметра плиты выводится аналогично выводу формулы собственного параметра стержня и имеет вид:

$$\lambda_r = \frac{\sum_{x,y} L(W) \cdot W(x, y) p_i}{\sum_{x,y} (W_{x,y})^2 p_i^2}. \quad (6)$$

В данном случае необходимо обеспечить выделе-

ние двумерного массива для хранения расчетных перемещений узлов в каждой итерации. Перед началом расчета в каждой ячейке следует задать перемещение узлов исходного приближения в виде единичных значений во всех незакрепленных узлах и нулевых значений в закрепленных.

Далее определяются значения собственного параметра λ_n по формуле (6), и перемещение каждого узла на очередном шаге итераций корректируется по значению собственного (частотного) параметра всей платы:

$$W(x, y) = \frac{\bar{L}(W)}{p_i \lambda_n - A3},$$

где $A3$ – коэффициент при $W(x, y)$ в левой части (3), $\bar{L}(W)$ – левая часть (3) без $W(x, y)$.

После каждого уточнения значений $W(x, y)$ определяются значения функции W в законтурных узлах в зависимости от способа закрепления, и процесс вычислений повторяется для следующего шага итераций.

Процесс вычислений продолжается до выполнения условия сходимости итерационного процесса:

$$\left| \frac{\lambda^{(n+1)} - \lambda^{(n)}}{\lambda^n} \right| \leq \varepsilon,$$

где n – номер итерационного цикла; ε – величина, определяющая сходимость процесса.

По полученному значению λ_n вычисляется первая резонансная частота колебаний пластины:

$$f_1 = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{\lambda_n D}{\rho_n \delta}},$$

а соответствующие ей значения $W(x, y)$ в узлах модели дают первую собственную форму колебаний пластины.

Таким образом, математическая модель (система алгебраических уравнений) определения низшей собственной частоты требует для своей реализации формирования сеточной области (рис. 1), массива коэффициентов плотности (5), задания начального приближения собственной формы колебаний и определения граничных условий. Для определения собственной формы и частоты организуется итерационный вычислительный процесс.

Для вычисления второй, третьей, четвертой, пятой и шестой собственных форм и частот колебаний используется итерационный процесс, аналогичный процессу расчета первого резонанса. Исходные данные те же – сеточная область, коэффициенты плотности и т.д. К ним относятся и массив значений сеточной функции $W1(x, y)$, $W2(x, y)$, $W3(x, y)$ и т.д., соответствующий вычисленным первой, второй, третьей и т.д. собственным формам.

Для определения последующих форм и частот применяется свойство ортогональности собственных форм [6]. Подчинив исходную форму $W0(x, y)$ и ее последующие итерации условию ортогональности с первой, второй и т.д. собственными формами, можно вычислить значения сеточной функции, соответствующие второй, третьей и т.д. собственным формам.

Например, для второй формы

$$W2(x, y) = W0(x, y) - W1(x, y) \frac{\sum_{x,y} [W0(x, y) \cdot W1(x, y)]}{\sum_{x,y} [W1(x, y)]^2}.$$

Аналогично для остальных форм, причем эти уравнения входят не одномерные, а двухмерные массивы сеточной функции.

Поскольку в расчетах перемещения собственных форм определяются с точностью до постоянного множителя, для получения истинных значений перемещений при колебаниях пластины используется формула масштабного коэффициента, в которую введены затухание и амплитуда внешнего воздействия:

$$A = \frac{\pi \rho \delta (a_k \cdot 9,81) \sum_{x,y} p_i |W(x, y)|}{\lambda D \sum_{x,y} L(W(x, y)) W(x, y)},$$

где λ – логарифмический декремент колебаний; a_k – амплитуда внешнего воздействия.

Масштабный коэффициент необходимо вычислять для каждой формы колебаний. Затем считать истинные перемещения в миллиметрах: $W_{uc} = 1000 \cdot A \cdot W(x, y)$. Далее можно строить графически i -ю собственную форму колебаний.

Заключение. При эксплуатации на реальных объектах-носителях на РЭС воздействует большое число дестабилизирующих факторов [7, 8]. Одним из них является вибрация, опасность которой заключается в возникновении резонанса. Совпадение частот собственных и внешних воздействий может оказывать значительное влияние как на функционирование аппаратуры в целом, так и на работоспособность ее конструктивных элементов, а в некоторых случаях привести к отказу всего устройства. Поэтому важной задачей при проектировании нового устройства является моделирование динамических характеристик конструкции, ее элементов и узлов. Математические модели пластинчатых конструкций, построенные МКЭ, представляются доступным и эффективным инструментом анализа конструкций РЭС, оценки вибропрочности и виброустойчивости устройства.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ:

1. Кофанов Ю.Н. Информационная технология моделирования механических процессов в конструкциях радиоэлектронных средств / Ю.Н. Кофанов, Е.С. Новиков, А.С. Шалупов. – М.: Радио и связь, 2000. – 160 с.
2. Аль-Араджи З.Х.М., Макаров О.Ю., Турецкий А.В., Шуваев В.А. Моделирование механических характеристик многослойных печатных плат в PRO/ENGINEER Радиотехника. 2014. № 3. С. 101-102.
3. Токарев М.Ф. Механические воздействия и защита радиоэлектронной аппаратуры: Учеб. пособие для вузов / М.Ф. Токарев, Е.Н. Талицкий, В.А. Фролов / Под ред. В.А. Фролова. – М.: Радио и связь, 1984. – 224 с. ил.
4. Тартаковский А.М. Красные задачи в конструировании радиоэлектронной аппаратуры. Изд-во Саратов. ун-та, 1984. – 132 с.
5. Хайкин С.Э. Физические основы механики. – М.: Высшая школа, 1962. – 772 с.
6. Бабаков И.М. Теория колебаний. – М.: Наука, 1968. – 559 с.
7. Таньков Г.В., Трусов В.А. Модельные и стендовые методы определения амплитудно-частотных характеристик плат БРЭА / Труды международного симпозиума Надежность и качество. 2019. Т. 1. Пенза: Изд-во ПГУ, 2019. С. 304-307.
8. Юрков Н.К., Михайлов В.С. Анализ возможностей по снижению объема испытаний на надежность / Надежность и качество сложных систем. – 2019. – № 4 (28). С. 149-156.

Статья поступила в редакцию 01.02.2022

Статья принята к публикации 10.03.2022