УДК 330.4
DOI: 10.26140/anie-2020-0903-0064

ВИДЫ УСТОЙЧИВОСТИ ДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ

SPIN 2385-5771
AuthorID: 819700
ResearcherID: H-3266-2018
ORCID: 0000-0002-3925-4652

Никоноров Валентин Михайлович, кандидат экономических наук, доцент
Высшей школы управления и бизнеса
Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого
(195251, Санкт-Петербург, ул. Политехническая, д.29, e-mail nikanorv@mail.ru)

Аннотация. Цель исследования: предложить классификацию видов устойчивости динамической системы. Объект исследования – сложная динамическая система. В данном случае сложность системы определяется наличием нелинейности и неопределенности. Предмет исследования – виды устойчивости системы. Так как в настоящее время существует достаточное количество видов устойчивости, но нет сопряжения со свойствами и состояниями системы. По мнению автора, наличие классификации видов устойчивости упростит задачу исследователя в случае, когда речь пойдет об изучении определенного свойства или состояния системы. Задачи: рассмотреть существующие виды устойчивости динамической системы, разделить их в зависимости от признаков (свойств или состояний динамической системы). Методы исследования – анализ, синтез, сравнение, методы математического анализа (дифференциальное исчисление). В исследовании описание систем дается с позиций применения дифференциальных уравнений. Рассматриваются линейные однородные (неоднородные) дифференциальные уравнения. В результате предложена классификация видов устойчивости динамических систем.

Ключевые слова: устойчивость, равновесие, критерий, движение, постоянное возмущение, структурная устойчивость, дифференциальное уравнение.

TYPES OF STABILITY DYNAMIC SYSTEM

Nikonorov Valentin Mikhailovitch, Candidate of Economics, Associated Professor
Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University
(Russia, 195251, Polytechnicheskaya, 29, e-mail nikanorv@mail.ru)

Abstract. Research objective: to offer classification of types of stability of a dynamic system. The subject of the study is a complex dynamic system. Here, the complexity of the system is determined by the presence of nonlinearity and uncertainty. The subject of the study are the types of stability of the system. Since there are currently enough types of stability, there is no interface with the properties and states of the system. According to the author, the existence of a classification of types of stability will simplify the task of the researcher when it comes to studying a certain property or state of the system. Tasks: to review the existing types of stability of the dynamic system, to separate them depending on the characteristics (properties or states of the dynamic system). Methods of research - analysis, synthesis, comparison, methods of mathematical analysis (differential calculus). The study describes systems from the standpoint of applying differential equations. Linear homogeneous (non-uniform) differential equations are considered. As a result, classification of types of stability of dynamic systems is proposed.

Keywords: Stability, equilibrium, criterion, motion, constant disturbance, structural stability, differential equation.

ВВЕДЕНИЕ

Актуальность исследования. Понятие «устойчивость», на первый взгляд, вполне себе представимо даже на уровне здравого смысла. Однако, для каждого конкретного случая требуется уточнение и детализация, какая именно устойчивость подразумевается. Если в исследовании применен только термин «устойчивость» без дальнейшего пояснения, то возможна контаминация. По мнению автора, детальное описание видов устойчивости сослужит хорошую службу в деле упорядочения картины мира и, соответственно, дальнейшего упорядочения хаоса.

Объект исследования – сложная экономическая система.

Предмет исследования – виды устойчивости сложной экономической системы.

МЕТОДОЛОГИЯ

Цель исследования – рассмотреть понятие «устойчивость», применить его к сложной экономической системе, выделить виды устойчивости сложной экономической системы).

Методы исследования: анализ, синтез, сравнение.

Одно из определений системы следующее: «Комплекс элементов, находящихся во взаимодействии» [1]

Сложность системы можно связать со следующими признаками:

1) наличие нелинейности;
2) наличие неопределенности [2]

Экономическая система отражает взаимодействие экономических элементов и связи между ними на различных уровнях:

1) микроэкономика;
2) мезоэкономика;
3) макроэкономика, включая глобальный уровень.

Если объединить три вышеназванных определения, то имеем сложную экономическую систему.

Теперь перейдём к устойчивости. По мнению автора, нет единого понятия устойчивости, так как рассматривается устойчивость равновесия, движения, структур и пр. Согласуясь с этим, рассмотрим соответствующие виды устойчивости.

1. Устойчивость состояния равновесия. Одно из часто встречающихся определений натолкнет нас на вид устойчивости, раскрывающийся в подвидах: «…устойчивость – способность системы возвращаться к состоянию равновесия после прекращения воздействия, нарушившего это равновесие.» [3] Соответственно, здесь речь идет об устойчивости состояния равновесия системы.

Из физики состояние равновесия (покоя) тела (материальной точки), например, означает, что сумма всех сил равна нулю (1).

$$\sum_{i=1}^{n}\overline{F_i}=0 \qquad (1)$$

где $\overline{F_i}$ – i-ая сила, действующая на тело;

n – число сил.

Забегая вперед, отметим, что для равновесия системы применяется подобный подход. Приведем одно из определений устойчивости состояния равновесия. [4]

«состояние равновесия x=x*, y=0 называется устойчивым, если, задав наперед сколь угодно малое ε (ε > 0), можно найти такое δ(ε), что если для t=0

$$|x(0)-x^*|<\delta, |y(0)|<\delta,$$

то тогда для 0< t < ∞

$$|x(t)-x^*|<\varepsilon, |y(t)|<\varepsilon."$$

Иначе говоря, состояние равновесия устойчиво, если достаточно малое возмущение так и останется малым. Если динамическую систему можно описать двумя линейными дифференциальными уравнениями первого порядка (их можно свести к одному уравнению второго порядка)

$$\frac{dx}{dt}=f(x,y)$$

$$\frac{dy}{dt}=g(x,y)$$

то состояниям равновесия соответствуют особые точки:

$$\frac{dx}{dt}=0$$

$$\frac{dy}{dt}=0$$

В случае механики (2) означает, что одновременно равны 0 скорость и ускорение, т.е. система находится в состоянии покоя. Известно, что для рассмотренного случая устойчивому состоянию равновесия соответствуют особые точки – устойчивый узел, устойчивый фокус. Соответственно, наряду с устойчивым состоянием равновесия есть неустойчивое состояние равновесия. Особые точки это вид стационарного движения. Т.е. устойчивость равновесия это устойчивость стационарного движения.

Первый подход к равновесию экономической системы связан с Л. Вальрасом [5]. Л. Вальрас рассматривал m рынков товаров и n рынков факторов производства. В состоянии равновесия спрос и предложение равны друг другу на каждом из (m+n) рынков. Для этого применяется новый товар – «денежная единица». Экономическую систему также можно описать системой дифференциальных уравнений (модель Солоу, например) и применить аппарат теории устойчивости.

Н.Д. Кондратьев рассматривал экономическое равновесие следующим образом:

«…есть какое-то предельное состояние его (народного хозяйства), которое возможно лишь при определенных условиях и которое выражается в каких-то определенных соотношениях элементов народного хозяйства. Всюду, где дано равновесие, дано это предельное состояние хозяйства…» [6].

2. Устойчивость решения (движения) системы. Решение дифференциального уравнения, описывающего динамическую систему, также называется движением системы (система движется во времени). Система динамическая, меняется во времени, соответственно, движение системы рассматривается на промежутке [t_o; +∞].

Возникает определение «устойчивость движения системы» или «устойчивость решения системы».

Динамическую систему можно описать системой обыкновенных дифференциальных уравнений (далее – ОДУ):

$$\dot{y}=f(t,y),\ y\in D\subset R^n, t\geq 0 \qquad (1)$$

Или

$$\frac{dy_i}{dt}=f_i(t,y_1,...,y_n),\ i=1,...,n \qquad (1')$$

Рассматриваем систему, обладающую свойством единственности: при начальных данных (t_o;y_o) система имеет единственное решение η(t). Это решение есть траектория движения системы в фазовом пространстве.

Решение φ(t) устойчиво (устойчиво по Ляпунову), если для любых ε>0 и $t_0\in[0;+\infty[$ существует δ= δ(ε; t_0)>0, такое, что для всех решений (1) y(t), удовлетворяющих условию

$$\|y(t_0)-\eta(t_0)\|\leq\delta \qquad (2)$$

справедливо

$$\|y(t)-\eta(t)\|\leq\varepsilon, t\in[t_0;+\infty[\qquad (3)$$

При этом решения y(t), близкие в начальный момент времени к η(t), на всем промежутке $t\in[t_0;+\infty[$ отстоят от него не более, чем на ε (находятся в трубке радиуса ε) (рис.1).[7]

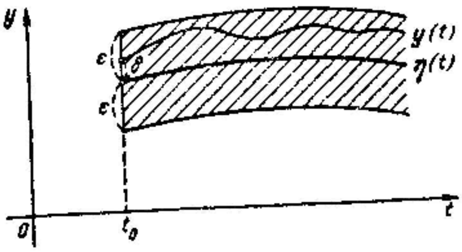

Рисунок 1- Устойчивое движение (решение) динамической системы

Если динамическую систему описывает линейное дифференциальное уравнение 3-го порядка, то для определения устойчивости состояния равновесия применяются алгебраические критерии Рауса, Гурвица.

Если динамическую систему описывает линейное дифференциальное уравнение 4-го и более высокого порядка, то для определения устойчивости состояния равновесия применяются частотные критерии Михайлова Найквиста.

3. Устойчивость решения (движения) системы при постоянно действующих возмущениях (малых).

Динамическую систему можно описать системой обыкновенных неоднородных дифференциальных уравнений:

$$\dot{y}=f(t,y)+R(t,y) \qquad (4)$$

Функция R(t,y) характеризует случайные постоянно действующие возмущения

$$\|R(t,y)\|\leq\rho, \rho\geq 0 \qquad (5)$$

ρ – достаточно малое положительное число

Функции f(t,y), R(t,y) однозначны и непрерывны по t.

Рассматриваем систему (4), обладающую свойством единственности: при начальных данных (t_o;y_o) система имеет единственное решение. Рассмотрим систему без возмущений

$$\dot{y}=f(t,y) \qquad (4')$$

Нулевое (тривиальное) решение (4') θ(t) устойчиво при постоянно действующих возмущениях, если для любых ε>0 и $t_0\in[0;+\infty[$ существуют r= r(ε; t_0)>0 и ρ= ρ(ε; t_0)>0, такие, что любое решение (4) y=y(t), удовлетворяющее условию

$$\|y(t_0)\|\leq r, t=t_0\geq 0 \qquad (6)$$

будет удовлетворять условию

$$\|y(t)\|\leq\varepsilon, t\geq t_0\geq 0 \qquad (7)$$

При любых возмущениях R(t,y).[8]

4. Устойчивость решения (движения) системы по части переменных означает, что постоянно действующие возмущения относятся только к некоторым параметрам системы [9].

5. Устойчивость по Лагранжу означает, что траектория системы остается в ограниченной области фазового пространства. Устойчивы по Лагранжу особые точки и циклы, например [10].

6. Устойчивость по Пуассону означает, что система в своем движении может возвращаться как угодно близко к своему начальному положению в фазовом пространстве [10].

7. Орбитальная устойчивость решения означает, что проекция траектории системы из фазового пространства в соответствующее подпространство (без t) достаточно близка к проекции опорной траектории. При этом траектории в фазовом пространстве могут разбегаться, но также находятся в трубке радиуса ε по аналогии с рис.1. Соответственно, орбитальная устойчивость решения эквивалентна орбитальной устойчивости траектории [11].

8. Структурная устойчивость системы означает, что при сколь угодно малом возмущении системы уравнений качественные свойства системы (число особых точек, число циклов) не меняются [12].

9. Дадим определение непосредственно устойчивости динамической системы.

«Во многих практически важных случаях все процессы ограничены и даже равномерно ограничены при $t \to \infty$, так что либо

$$|y(t, y_0, t_0)| \le a(\rho, t),\ t \ge t_0,\ y_0 \le \rho \qquad (2.1.4)$$

либо

$$|y(t, y_0, t_0)| \le a_0,\ t \ge t_0+\tau(y_0, t_0) \qquad (2.1.5)$$

где граница a_0 характеризует систему, в то время как «время перехода» τ зависит от протекания процесса. В случае (2.1.4) мы будем называть динамическую систему устойчивой, в случае (2.1.5) – асимптотически устойчивой» [13].

Соответственно, асимптотическая устойчивость сложной динамической системы «человек» по параметру «температура тела» означает, что на протяжении жизни человека этот показатель должен находиться в пределах [35,5; 37,2]. Подобные границы можно очертить для других параметров: pH крови, pH слюны, пульс, верхнее давление, нижнее давление. Для динамических систем, созданных человеком (двигатель внутреннего сгорания, газовая турбина и пр.), также можно установить границы показателей.

Сведем виды устойчивости в таблицу (табл.1). В качестве признака укажем соответствующее свойство или состояние системы. При этом мы не указали экспоненциальную и условную устойчивости.

Таблица 1 - Виды устойчивости динамической системы

№	Признак	Вид устойчивости	Краткое пояснение
1	Состояние равновесия (тривиальное решение)	Устойчивость состояния равновесия системы (устойчивость стационарного движения)	Достаточно малое возмущение так и останется малым. Критерии – особые точки (устойчивый узел, устойчивый фокус).
2		Устойчивость движения (решения) системы	При малых возмущениях начального положения решение (движение) системы мало отклоняется от опорного решения.
3		Устойчивость решения (движения) при постоянно действующих возмущениях	Решение (движение) системы мало отклоняется от опорного решения при постоянно действующих малых возмущениях.
4		Устойчивость движения (решения) системы по части переменных	Постоянно действующие малые возмущения относятся только к части параметров системы.
5	Движение системы	Устойчивость движения (решения) системы по Лагранжу	Траектория системы остается в ограниченной области фазового пространства
6		Устойчивость движения (решения) системы по Пуассону.	Система в своем движении может возвращаться как угодно близко к своему начальному положению в фазовом пространстве
7		Орбитальная устойчивость движения (решения) системы.	Проекция траектории системы из фазового пространства в соответствующее подпространство достаточно близка к проекции опорной траектории
8	Структура системы	Структурная устойчивость	При сколь угодно малом возмущении системы уравнений качественные свойства системы не меняются.
9	Система непосредственно	Устойчивость системы	$\lvert y(t, y_0, t_0)\rvert \le a_0, t \ge t_0+\tau(y_0, t_0)$

НОВИЗНА

Существующие виды устойчивости динамической системы разнесены в соответствии со свойствами и состояниями системы.

РЕЗУЛЬТАТЫ

Предложена классификация видов устойчивости динамической системы (таблица1).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ:

1. Bertalanffy L. An Outline of General System Theory. – «British Journal Philosophy of Science», 1950, p. 134–65.

2. Занг В.-Б. Синергетическая экономика. Время и перемены в нелинейной экономической теории. – М.: Мир, 1999 – 335с.

3. Новиков Д.А. Классификации систем управления // Проблемы управления. 2019. № 4. С. 27–42.

4. Андронов А.А., Витт А.А., Хайкин С.Л. Теория колебаний. – М.: Изд-во физ.-мат. литературы, 1959. – 918с.

5. Вальрас Л. Элементы чистой политической экономии. – М.: Изограф, 2000. – 448 с.

6. Кондратьев Н.Д. Основные проблемы экономической статики и динамики. – М.: Наука, 1991. – 570с.

7. Демидович Б.П. Лекции по математической теории устойчивости. – СПб.: Лань, 2008. – 480с.

8. С. И. Горшин, О некоторых критериях устойчивости при постоянно действующих возмущениях, Изв. вузов. Матем., 1967, № 11, с.17–20.

9. Румянцев В.В., Озиранер А.С. Устойчивость и стабилизация движения по отношению к части переменных. – М.: Наука, 1987. – 256с.

10. Рябова А.В., Тертычный-Даури В.Ю. Элементы теории устойчивости. – СПб.: Изд-во ИТМО, 2015. – 107с.

11. Королев В.С. Устойчивость решения динамических систем по части переменных // Естественные и математические науки в современном мире: сб. ст. по матер. XIX междунар. науч.-практ. конф. № 6(18). – Новосибирск: СибАК, 2014.

12. Гласс Л., Мэки М. От часов к хаосу: ритмы жизни. – М.: Мир, 1991. – 248с.

13. Рейссиг Р., Сансоне Г., Конти Р. Качественная теория нелинейных дифференциальных уравнений. – М.: Наука, 1974. – 320с.

Статья поступила в редакцию 24.04.2020
Статья принята к публикации 27.08.2020