УДК 330.4
DOI: 10.26140/anie-2020-0902-0060

ПРОГНОЗ ЧИСЛЕННОСТИ НАСЕЛЕНИЯ РФ (МОДЕЛЬ ФЕРХЮЛЬСТА)

SPIN 2385-5771
AuthorID: 819700
ResearcherID: H-3266-2018
ORCID: 0000-0002-3925-4652
Никоноров Валентин Михайлович, кандидат экономических наук, доцент
Высшей школы управления и бизнеса
Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого
(195251, Россия, Санкт-Петербург, ул. Политехническая, д.29, e-mail nikanorv@mail.ru)

Аннотация. Цель исследования: предложить прогноз численности населения Российской Федерации. Основной ресурс любой страны – квалифицированная рабочая сила. Соответственно, рост численности населения – залог роста трудовых ресурсов. И, напротив, снижение численности населения – стратегическая угроза для существования страны. Таким образом, прогноз численности своего рода индикатор благоденствия страны или ее заката. Задачи исследования: рассмотреть имеющиеся математические модели численности населения, применить соответствующую модель для построения и решения математической модели численности населения РФ. Была выбрана математическая модель Ферхюльста. На статистических данных Российской Федерации за период 1990-2020г.г. была проведена калибровка базовой модели Ферхюльста. Получены оценки значений параметров модели. Полученная модель применена для прогноза численности населения РФ на период 2030-2090г.г. Методы исследования – анализ, синтез, сравнение. В результате получен прогноз численности населения РФ.

Ключевые слова: математическая модель, популяция, биотический потенциал, емкость среды, логистическое уравнение.

RUSSIAN POPULATION FORECAST (FERHULST MODEL)

Nikonorov Valentin Mikhailovitch, Candidate of Economics,
Associated Professor
Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University
(195251, Russia, St. Petersburg, Polytechnicheskaya, 29, e-mail nikanorv@mail.ru)

Abstract. The purpose of the study is to offer a forecast of the population of the Russian Federation. The main resource of any country is a skilled labour force. Accordingly, population growth is the key to labour growth. And, on the contrary, population decline is a strategic threat to the country ‘s existence. Thus, the forecast of numbers is a kind of indicator of the welfare of the country or its sunset. Research tasks: to consider the available mathematical models of population size, to apply the corresponding model to build and solve the mathematical model of population size of the Russian Federation. Ferhulst ‘s mathematical model was chosen. On the statistical data of the Russian Federation for the period 1990-2020. The Ferhulst base model was calibrated. Estimates of model parameter values were obtained. The obtained model was applied to the forecast of the population of the Russian Federation for the period 2030-2090. Methods of research - analysis, synthesis, comparison. As a result, the forecast of the population of the Russian Federation was obtained.

Keywords: Mathematical model, population, biotic potential, medium capacity, logistics equation.

ВВЕДЕНИЕ

Актуальность исследования. Люди – ключевой ресурс государства, основа процветания страны. Прирост населения означает прирост важнейшего фактора производства – рабочей силы. Напротив, снижение численности населения крайне негативная тенденция для страны. Наличие прогноза численности населения покажет возможные угрозы для страны и позволит оптимизировать демографическую политику государства.

Объект исследования – население Российской Федерации.

Предмет исследования – численность населения РФ.

МЕТОДОЛОГИЯ

Цель исследования – спрогнозировать численность населения РФ с применением математической модели Ферхюльста.

Методы исследования: анализ, синтез, сравнение, математическое моделирование.

Приведем следующее определение математической модели: «класс абстрактных и символьных математических объектов, таких, как числа или векторы, и отношения между ними» [1].

Для оценки численности населения N рассмотрим некоторые существующие модели численности населения.

Первая математическая модель численности населения (населения Англии) была предложена Томасом Робертом Мальтусом в начале XIX. Мальтус рассматривал случай неограниченного роста популяции (отсутствует голод, болезни и пр.). Этой математической модели соответствует дифференциальное уравнение (1).[2]

$$\frac{dN(t)}{dt} = rN(t) \qquad (1)$$

где N – численность населения;

r – коэффициент прироста численности населения (нет ограничений для роста численности населения страны и потому численность населения растет по экспоненте). Иное название r – биотический потенциал.

r=constant (предположение Мальтуса)

Решение (1) имеет вид экспоненциальной функции (2)

$$N = N_0 e^{rt} \qquad (2)$$

Возможны варианты:

r>0 численность населения возрастает по экспоненте при $t \to +\infty$;

r<0 численность населения стремится к 0 при $t \to +\infty$.

Мальтус на основании своей модели предположил, что производство продуктов питания для населения может расти в арифметической прогрессии. Возникает очевидное противоречие между ростом населения по экспоненте и производством продуктов питания в арифметической прогрессии. Противоречие это указывало на возможную гибель человеческой популяции от нехватки ресурсов. Предложение Мальтуса – ограничить рождаемость населения, особенно среди беднейших слоев. В настоящее время это предложение изменило упаковку и предлагается странами «золотого миллиарда» для слаборазвитых стран как контроль над рождаемостью. Суть неизменна, население стран «золотого миллиарда» имеет право на неограниченное потребление ресурсов, в то время как прочие страны всего лишь поставщики этих ресурсов для стран «золотого миллиарда». Соответственно, модное поветрие «чайлдфри» (англ childfree – свободный от детей) – одно из проявлений контроля за рождаемостью, умело внедренное в недостаточно окрепшие умы.

Ферхюльст дополнил математическую модель Мальтуса, предположив, что у численности популяции есть конечное значение – K. (3). [3]

$$\frac{dN(t)}{dt} = rN(t) - \frac{r}{K}N(t)^2; N(t=t_0) = N_0 \qquad (3)$$

где K – предел, к которому во времени стремится численность популяции, обусловлен ограниченностью ресурсов;

K=constant;

No – численность популяции в начальный момент времени (начальное условие).

(3) имеет название «уравнение логистического роста».

В 1960г. была предложена математическая модель численности населения Земли (Foerster). [4]

$$N(t) = \frac{C_1}{t_0 - t} \qquad (4)$$

C_1 =constant=200 млрд. человек;

t_0 – начиная с этого момента времени, численность популяции перестает расти (2026 год).

Модель Ферстера также имеет название «закон гиперболического роста населения Земли».

Модель Ферстера была доработана С.П. Капицей. [5]

$$N(t) = \frac{C_2}{\tau} arcctg(\frac{t_0 - t}{\tau}) \qquad (5)$$

где C_2 =172 млрд. чел.;

начальный момент времени – 2000-ый год;

τ – период, связанный с репродуктивной способностью и равный 45 лет.

Также заслуживает внимания модель Лотки-Вольтерра, которая представляет систему двух нелинейных дифференциальных уравнений. [6]

$$\frac{dx}{dt} = a_1x - b_1x - c_1xy$$

$$\frac{dy}{dt} = a_2y - b_2y - c_2xy$$

Где x(t) – численность одного вида;

y(t) – численность другого вида.

Если $c_1>0$, $c_2>0$, между видами конкуренция.

Если $c_1<0$, $c_2<0$, между видами сотрудничество.

Если $c_1>0$, $c_2<0$, тогда x(t) – жертва, y(t) – хищник.[7]

Кратко рассмотрим модель Гомпертца. [8]

$$\frac{dN(t)}{dt} = a(1 - \frac{\ln N(t)}{\ln L})N(t)$$

Решение модели Гомпертца

$$N(t) = L(\frac{N_0}{L})^{e^{-\frac{a}{\ln L}}}$$

Возможны варианты

0< No <L численность возрастает

No>L численность убывает.

$$\lim_{t\to+\infty} N(t) = \lim_{t\to+\infty} L(\frac{N_0}{L})^{e^{-\frac{a}{\ln L}}} = L$$

Здесь L имеет такой же смысл как K в модели Ферхюльста – до какого предела может вырасти численность популяции в условиях ограниченности ресурсов.

В этом исследовании не была учтена модель Холлинга-Тэннера [9].

Применим для прогноза численности населения РФ модель Ферхюльста.

Запишем (3) в виде

$$\frac{dN}{dt} = rN - \frac{r}{K}N^2 = r\frac{N}{K}(K-N) = aN(K-N); a = \frac{r}{K} \qquad (6)$$

Умножим обе части (6) на dt. Получим

$$\frac{dN}{aN(K-N)} = dt \qquad (7)$$

Учтем, что

$$\frac{1}{aN(K-N)} = \frac{1}{aK}(\frac{1}{N} + \frac{1}{(K-N)}) \text{ элементарные дроби} \qquad (8)$$

Подставим (8) в (7)

$$\frac{1}{aK}(\frac{1}{N} + \frac{1}{(K-N)})dN = dt \qquad (9)$$

Запишем (9) в виде

$$\frac{1}{aK}(\frac{1}{N} - \frac{1}{(N-K)})dN = dt \qquad (10)$$

$$\frac{1}{aK}\int(\frac{1}{N} - \frac{1}{(N-K)})dN = \int dt \qquad (11)$$

После интегрирования (10) имеем:

$$\ln\frac{N}{N-K} = aKt + \ln C = \frac{r}{K}Kt + \ln C = rt + \ln C \qquad (12)$$

После потенциирования (11) получим:

$$\frac{N(t)}{N(t)-K} = Ce^{rt} \qquad (13)$$

$$N(t=t_0) = N_0; C = \frac{N_0}{N_0 - K} \qquad (14)$$

Подставим (13) в (12):

$$\frac{N(t)}{N(t)-K} = \frac{N_0}{N_0 - K}e^{rt} \qquad (15)$$

Из (14) имеем

$$N(t) = \frac{KN_0e^{rt}}{K + N_0(e^{rt} - 1)} = \frac{KN_0}{N_0 + (K - N_0)e^{-rt}} \qquad (16)$$

$$\lim_{t\to+\infty} N(t) = \lim_{t\to+\infty}\frac{KN_0}{N_0 + (K-N_0)e^{-rt}} = K \qquad (17)$$

В соответствии с (17) численность популяции при t→+∞ стремится к K (емкости ниши).

Зададим моменты времени t_0=1990, t_1=2005,t_2=2020.

Воспользуемся статистическими данными (табл.1).

Таблица 1 - Численность населения РФ за 1990-2020г.[10].

№	Год	Численность, чел.
1	1990	147 665 081
2	1991	148 273 746
3	1992	148 514 692
4	1993	148 561 694
5	1994	148 355 867
6	1995	148 459 937
7	1996	148 291 638
8	1997	148 028 613
9	1998	147 802 133
10	1999	147 539 426
11	2000	146 890 128
12	2001	146 303 611
13	2002	145 166 731
14	2003	144 963 650
15	2004	144 168 205
16	2005	143 474 219
17	2006	142 753 551
18	2007	142 220 968

19	2008	142 008 838
20	2009	141 903 979
21	2010	142 856 536
22	2011	142 865 433
23	2012	143 056 383
24	2013	143 357 059
25	2014	143 666 931
26	2015	146 267 288
27	2016	146 544 710
28	2017	146 804 372
29	2018	146 880 342
30	2019	146 780 720
31	2020	146 745 098

$$N_0 = 147665081$$

Для t_1 запишем (15)

$$N(t_1) = N_1 = \frac{KN_0}{N_0 + (K - N_0)e^{-15r}} \quad (18)$$

Для t_2 запишем (15)

$$N(t_2) = N_2 = \frac{KN_0}{N_0 + (K - N_0)e^{-30r}} \quad (19)$$

Мы намеренно взяли периоды времени t_0, t_1, t_2 такими, чтобы $\exp(-rt_2)=[\exp(-rt_1)]^2$ Это позволит нам применить в расчетах квадратное уравнение.

Решим систему из двух уравнений (18), (19). Из (18)

$$e^{-15r} = z = \frac{N_0(K - N_1)}{N_1(K - N_0)}; z^2 = \frac{N_0^2(K - N_1)^2}{N_1^2(K - N_0)^2} \quad (20)$$

Из (19)

$$e^{-30r} = z^2 = \frac{N_0(K - N_2)}{N_2(K - N_0)} \quad (21)$$

Приравниваем (20) и (21), получаем квадратное уравнение

$$N_0N_2(K - N_1)^2 = N_1^2(K - N_2)(K - N_0)$$

$$N_0N_2(K^2 - 2KN_1 + N_1^2) = N_1^2(K^2 - K(N_2 + N_0) + N_2N_0) \quad (22)$$

$$(N_0N_2 - N_1^2)K^2 + K((N_2 + N_0)N_1^2 - 2N_1N_2N_0) = 0$$

$$K = \frac{N_1^2(N_2 + N_0) - 2N_1N_2N_0}{N_1^2 - N_0N_2} \quad (23)$$

Подставим в (23) численные значения, получим К=7 652 825 чел.

Из (20)

$$r = (\ln\frac{N_0(K - N_1)}{N_1(K - N_0)})(-15) = 0{,}000107 \quad (24)$$

(16) принимает вид

$$N(t) = \frac{KN_0e^{rt}}{K + N_0(e^{rt} - 1)} = \frac{7652825N_0}{N_0 + (7652825 - N_0)e^{-0{,}000107t}} \quad (25)$$

Соответственно, математическую модель численности населения Российской Федерации (25) можно интерпретировать следующим образом. Емкость среды для населения Российской Федерации составляет 7 652 825 человек.

Если ничего не менять в нынешней демографической ситуации, то численность населения РФ сократится до 7 652 825 человек. Соответствующим образом уменьшатся и границы страны. Примерно до территории современных Санкт-Петербурга и Ленинградской области. Как быстро будет сокращаться численность населения РФ?

Рассмотрим прогноз численности населения РФ в соответствии с математической моделью (25).

Таблица 2 - Прогноз численности населения РФ на 2030-2090г.

Год	Прогноз численности населения РФ, чел.
2030	137 007 365
2040	134 585 402
2050	132 250 027
2060	129 996 679
2070	127 821 111
2080	125 719 367
2090	123 687 752

Из таблицы 2 следует, что среднегодовое сокращение численности населения РФ составляет 0,2 млн. человек. Тогда время, за которое численность населения РФ достигнет своего предела составит

$$t = \frac{146{,}7 - 7{,}6}{0{,}2} = 695 \text{ лет}$$

Подобный прогноз численности населения РФ требует задействовать (если они уже не задействованы) ряд мер демографической политики.

РЕЗУЛЬТАТЫ

Новизна исследования – получена математическая модель численности населения РФ (на основе модели Ферхюльста)

Результаты исследования.

1) Получена математическая модель численности населения РФ на основании данных за 1990-2020г.г. (формула 24).

2) Рассчитан прогноз численности населения РФ на 2030-2090г.г. (табл.2).

ВЫВОДЫ

Дальнейшее направление исследования: верифицировать модель на данных СССР. Предварительно рассчитать коэффициенты K, r.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ:

1. *Корн Г., Корн Т. Справочник по математике (для научных работников и инженеров). М.: Наука, 1978 – 832с.*
2. *Malthus T. Population: The First Essay. Ann Arbor, MI: University of Michigan Press. 1978.*
3. *Verhulst P.F. Notice sur la loi que la population suit dans son accroissement, Corr. Math. Et Phys. 10, 113-121, 1838*
4. *Foerster, H. von, Mora P., and Amiot L. Doomsday: Friday, 13 November, A.D. 2026. At this date human population will approach infinity if it grows as it has grown in the last two millennia // Science. — 1960. — № 132. — С. 1291-1295.*
5. *Капица С.П. Феноменологическая теория роста населения Земли // Успехи физических наук. 1996. Т. 166. № 1.*
6. *Lotka A.J. On the true rate of natural increase as exemplified by the population of the United States, 1920 (совм. с L. I. Dublin), 'Journal of the American statistical association', 1925, v. 20, № 150.*
7. *Эдвардс Ч.Г., Пенни Д.Э. Дифференциальные уравнения и краевые задачи. – М.: ООО «И.Д. Вильямс», 2016. – 1104с.*
8. *Gompertz B. On the nature of the function expressive of the law of human morality, and on a new mode of determining the value of life contingencise // Fhil. Trans. Phil. Soc. London. A. 1825. Vol. 115. P. 513– 585.*
9. *Хайрер Э., Нерсетт С., Ваннер Г. Решение обыкновенных дифференциальных уравнений. - М.: Мир, 1990.-512с.*
10. *Численность населения РФ. – [Электронный ресурс] – https://ru.wikipedia.org/wiki/Население_России (дата обращения 25.03.2020).*

Статья поступила в редакцию 27.03.2020
Статья принята к публикации 27.05.2020