УДК 372.853
DOI: 10.26140/anip-2019-0802-0007

МУЛЬТИДИСЦИПЛИНАРНЫЙ ПОДХОД В ЗАДАЧЕ О МАКСИМАЛЬНОЙ ДАЛЬНОСТИ ПОЛЁТА ТЕЛА В ВЯЗКОЙ СРЕДЕ

Бобылёв Юрий Владимирович, доктор физико-математических наук, профессор кафедры «Общая и теоретическая физика»
Грибков Александр Иванович, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры «Общая и теоретическая физика»
Романов Роман Васильевич, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры «Общая и теоретическая физика»
Тульский государственный педагогический университет им. Л.Н. Толстого
(300026, Россия, Тула, пр. Ленина, 125, e-mail: rom_rom_vas@mail.ru)

Аннотация. На сегодняшний день получение значимых результатов в большинстве случаев возможно исключительно на стыке наук. В этом случае происходит взаимное дополнение методов из различных областей знаний. Подобное решение необходимо применять и при обучении школьников и студентов, не оставаясь в рамках одной конкретной дисциплины, а используя всю мощь разработок смежных курсов. В работе рассмотрена подобная реализация на примере задачи об условиях максимальной дальности полёта тела в вязкой среде. Таким образом, в статье описывается мультидисциплинарный подход, использующий сочетание при решении сравнительно сложных, но более приближенных к реальности физических задач расширенных аналитических, численных и компьютерных методов. Такой подход эффективен для осмысления и усвоения студентами материала разных дисциплин и применяется авторами в учебном процессе для физико-математических направлений педвуза. В результате при решении физической задачи помимо непосредственно физики используются сведения из дополнительных разделов математики, знания и умения пользоваться вычислительными средами класса САПР, а также элементы географии. Такая реализация с одной стороны формирует понимание практической значимости рассматриваемой проблемы, а не её теоретическую изолированность, с другой – позволяет сформировать основные профессиональные навыки.

Ключевые слова: высшее образование, вязкая среда, аналитическое решение, численные методы, компьютерное моделирование, вязкое трение, дальность полета, угол, падение, физическая задача, смежные курсы.

MULTIDISCIPLINARY APPROACH IN PROBLEM ABOUT MAXIMUM RANGE BODY IN A VISCOUS MEDIUM

Bobylev Yuri Vladimirovich, doctor of physics and mathematics sciences, professor
Gribkov Alexander Ivanovich, candidate of physics and mathematics sciences, docent
Romanov Roman Vasilyevich, candidate of physics and mathematics sciences, docent
Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University
(300026, Russia, Tula, Lenin Avenue, 125, e-mail: rom_rom_vas@mail.ru)

Abstract. To date, obtaining significant results in most cases is possible only at the intersection of Sciences. In this case, there is a mutual complement of methods from different fields of knowledge. Such a solution should be applied in the education of pupils and students, not staying within one particular discipline, and using the full power of the development of related courses. In this paper we consider a similar implementation on the example of the problem of the maximum range of the body in a viscous medium. Thus, the article describes a multidisciplinary approach that uses a combination of relatively complex, but more close to the reality of the physical problems of advanced analytical, numerical and computer methods. This approach is effective for understanding and assimilation of the material by students of different disciplines and is used by the authors in the educational process for physical and mathematical directions of pedagogical University. As a result, when solving a physical problem, in addition to physics, information from additional sections of mathematics, knowledge and skills to use computing environments of CAD class, as well as elements of geography are used. Such implementation on the one hand forms an understanding of the practical significance of the problem, not its isolation, on the other hand, allows to form the basic professional skills.

Keywords: higher education, viscous fluid, analytical solution, numerical methods, computer simulation, viscous friction, flight range, angle, drop, physical problem, related courses.

Постановка проблемы. В настоящее время наиболее интересные результаты получаются на стыке различных наук, когда методы, отработанные в каждой области знания, взаимно дополняют и обогащают друг друга [1; 2].

Такой же подход необходимо применять и при обучении школьников и студентов, не замыкаясь в рамках конкретной дисциплины, а используя всю мощь разработок смежных курсов [3–5].

Покажем это на примере физической задачи про движение тела в вязкой среде [6, С.339], теоретическое рассмотрение которой практически исчезло при изучении курса физики в обычных ВУЗах, возможно, из-за их постоянной оптимизации. Здесь же стоит заметить, что экспериментальное изучение этого вопроса по-прежнему актуально [7].

Решение проведём с привлечением не вполне тривиальных методов высшей математики и компьютерных приложений, используемых при обучении информационным технологиям. Необходимость симбиоза аналитического подхода и современных технологий обосновывается в [8–10].

1. Постановка задачи.

Пусть в вязкой среде с коэффициентом динамической вязкости η и плотностью ρ_0 с высоты h с начальной скоростью v_0 под углом к горизонту α брошен шар диаметром d, сделанный из материала плотностью ρ.

Полагаем высоту подъёма небольшой и, следовательно, ускорение свободного падения g постоянным. Силу сопротивления считаем по Стоксу (G. Stokes) линейно зависящей от скорости.

Опуская подробный вывод, приведённый в [11], сразу запишем итоговые уравнения движения в проекциях на стандартно выбранные оси

$$x = v_0 \tau \cos\alpha \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right), \tag{1}$$

$$y = h - v_p t + \tau\left(v_p + v_0 \sin\alpha\right)\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right). \tag{2}$$

Здесь использованы дополнительные обозначения

$$\tau = \frac{\rho d^2}{18\eta}, \quad v_p = g\left(1 - \frac{\rho_0}{\rho}\right)\tau, \tag{3}$$

где τ – характерное время процесса, то есть время, через которое показатель экспоненты становится равным единице, а v_p – предельная вертикальная составляющая скорости. По смыслу это скорость, которую мог бы приобрести шарик при неограниченном падении.

Также в [3] аналитически получены выражения для времени подъёма до максимальной высоты, сама высота и уравнение траектории

$$y = h + v_p\tau\ln\left(1 - \frac{x}{v_0\tau\cos\alpha}\right) + \frac{v_p + v_0\sin\alpha}{v_0\cos\alpha}x. \tag{4}$$

Заметим, что уравнения (2) и (4) являются трансцендентными, поэтому, положив $y = 0$, их нельзя решить аналитически и найти время всего полёта или дальность полёта x_m. Эти результаты в [11] получены уже численными методами, для чего авторами подготовлен рабочий лист PTC Mathcad, а также разработана программа компьютерного моделирования такого движения.

Тем не менее, всё-таки ещё один аналитический результат получить можно.

2. Аналитическое решение

В момент падения $y = 0$, $x = x_m$, и тогда из (4) получаем

$$0 = h + v_p\tau\ln\left(1 - \frac{x_m}{v_0\tau\cos\alpha}\right) + \frac{v_p + v_0\sin\alpha}{v_0\cos\alpha}x_m. \tag{5}$$

Если бы уравнение (5) для дальнейшего анализа удалось записать как явную функцию $x_m = x_m(\alpha)$ или наоборот, то возможно, что решение упростилось. Однако в силу его сложной структуры это недостижимо, поэтому используем редко применяемый, особенно в учебных задачах, приём, предварительно вводя для удобства новые переменные и параметры

$$X = \frac{x_m}{v_0\tau}, \quad H = \frac{h}{v_0\tau}, \quad z = \sin\alpha, \quad a = \frac{v_p}{v_0}. \tag{6}$$

Тогда (5) перепишется в виде

$$0 = H + a\ln\left(1 - \frac{X}{\sqrt{1 - z^2}}\right) + \frac{a + z}{\sqrt{1 - z^2}}X. \tag{7}$$

Здесь мы познакомили учащихся с методом обезразмеривания переменных, который часто позволяет многопараметрическую задачу свести к одному параметру, который и определяет вид решения. Здесь это параметр a.

Выражение (7) можно рассматривать как неявную функцию $F(X, z) = 0$ [12], работа с которыми также практически перестала рассматриваться в курсах высшей математики в педвузах.

Чтобы найти значение z_m, при котором дальность полёта станет максимальной X_m, воспользуемся понятием производной неявной функции. Вычислив полный дифференциал уравнения $F(X, z) = 0$, имеем такое выражение для производной функции $X = X(z)$

$$\mathrm{d}F(X,z) = \frac{\partial F}{\partial X}\mathrm{d}X + \frac{\partial F}{\partial z}\mathrm{d}z = 0, \rightarrow \frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}z} = -\frac{\dfrac{\partial F}{\partial z}}{\dfrac{\partial F}{\partial X}}. \tag{8}$$

Отсюда видно, что условие экстремума функции $X = X(z)$ будет определяться равенством нулю частной производной

$$\frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}z} = 0, \rightarrow \frac{\partial F}{\partial z} = 0. \tag{9}$$

Используя (7), вычисляем производную, приравниваем её к 0, сокращаем на $X_m \neq 0$ (Это минимальная дальность при броске вертикально вверх или вниз), получаем

$$a\frac{\dfrac{z_m}{(1 - z_m^2)\sqrt{1 - z_m^2}}}{1 - \dfrac{X_m}{\sqrt{1 - z_m^2}}} = \frac{\sqrt{1 - z_m^2} + (a + z_m)\dfrac{z_m}{\sqrt{1 - z_m^2}}}{(1 - z_m^2)}. \tag{10}$$

После достаточно длинных преобразований, которые мы здесь опускаем, имеем в безразмерном и явном виде

$$X_m = \frac{\sqrt{1 - z_m^2}}{az_m + 1}, \text{ или } x_{m\_\max} = \frac{v_0^2\tau\cos\alpha_m}{v_p\sin\alpha_m + v_0}. \tag{11}$$

Это связи между максимальной дальностью полёта и углом, при котором она достигается. То есть, зная одну величину, можно аналитически найти другую.

3. Численное решение

Далее (11) нужно подставить в (7) или (5).

$$0 = H + a\ln\left(\frac{az_m}{az_m + 1}\right) + \frac{a + z_m}{az_m + 1}. \tag{12}$$

К сожалению, получившееся уравнение опять-таки аналитически не решается, поэтому перейдем к результатам численных расчётов. Графики, подтверждающие вышесказанное, подготовлены в PTC Mathcad [13] и приведены на рис. 1. Расчёт проводился при h = 10 м, $v_0 = 15$, $\alpha_1 = 55°$, стальной шарик d = 2 мм, $\rho = 7800$ ^{3}, водная среда $\eta = 0{,}00106$ ·, $\rho_0 = 1000$ ^{3}. Расчётная траектория показана линией 1.

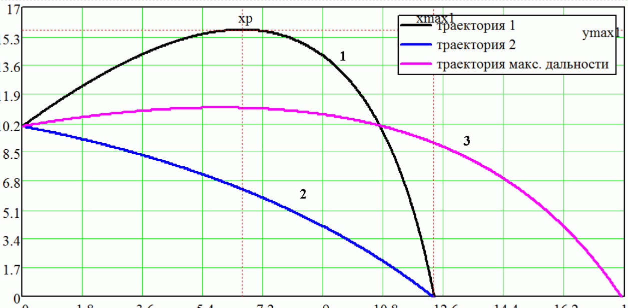

Рисунок 1 – Траектории движения шара при разных углах

Понятно, что одной и той же дальности можно достигнуть при двух разных углах вылета. Если один угол задан, то другой можно подобрать экспериментально или численно. Соответствующая траектория представлена линией 2 при угле вылета $\alpha_2 = -21°$. Бросать ведь можно не только вверх относительно горизонта, но и вниз.

В интервале между этими значениями и находится угол, при котором достигается наибольшая дальность полёта.

А теперь воспользуемся возможностью Mathcad строить график функции двух переменных $F(X,z)$ как поверхность в 3D-формате, однако в данном случае будем показывать не объёмную картину, а линии уровня, как обычно обозначаются горы на географических картах. Кроме того, опыт показал, что результаты вычислений более стабильны, если работать не с функцией (7), а с обратной функцией

$$F(X,z) = 1 - \frac{X}{\sqrt{1-z^2}} - e^{-\frac{H + \frac{a+z}{\sqrt{1-z^2}}X}{a}} = 0 \quad . \qquad (13)$$

Ограничив диапазон изменения функции *F*, оставим только нулевой уровень, а это и есть нужный нам график неявно заданной функции $X = X(z)$, который показан на рис. 2. Здесь для полноты картины задан диапазон изменения аргумента $-1 < z < 1$, хотя понятно, что нужный нам угол следует искать в интервале $0° < \alpha_m < 45°$ или $0 < z_m < 0,707$.

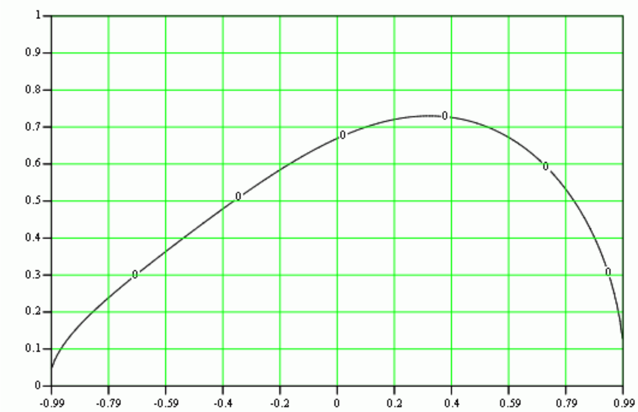

Рисунок 2 – Зависимость дальности полёта от угла вылета

По ранее указанным причинам будем искать корень не уравнения (12), а ему обратного

$$1 + \frac{1}{az_{\mathrm{m}}} = e^{\frac{H + \frac{a+z_{\mathrm{m}}}{az_{\mathrm{m}}+1}}{a}} \quad . \qquad (14)$$

Для этого в Mathcad есть встроенная функция поиска корня следующего синтаксиса root(f(x),x,xmin,xmax), где xmin, xmax – нижняя и верхняя границы интервала, где следует искать корень. При заданных условиях задачи получается, что $z_m = 0,32$, а угол $\alpha_m = 18,6°$, что и подтверждается графиками.

Заключение

Подведём итоги. В работе получен аналитический результат (11) и проведено компьютерное моделирование уравнений (1) и (2), а также их численное решение с использованием свойств неявно заданной функции.

Таким образом, при решении физической задачи помимо собственно физики были использованы сведения из дополнительных разделов математики, знания и умения пользоваться вычислительными средами класса САПР, и даже элементы географии. Таким образом, совмещен аналитический подход и его компьютерная реализация, важность которой обсуждается в [14–17].

Подобный подход применяется авторами в процессе преподавания не только традиционных дисциплин, но и материала элективных модульных блоков (ЭМБ), таких так «Практикум по решению экспериментальных задач» и «Основы вычислительного эксперимента». Естественно, желательно делать и наоборот [18], то есть при изучении соответствующих разделов математики или практикума по программированию иллюстрировать их конкретными задачами по физике.

В заключение отметим, что «идея витает в воздухе», вполне актуальна и современна, так как аналогичными приёмами пользуются при подготовке студентов-лингвистов [19] и спортсменов [20], причём именно при изучении физики!

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ:

1. Ильясов В.Х., Шамбулина В.Н. Направления развития методов преподавания и практико-ориентированный подход к преподаванию курса физики // Балтийский гуманитарный журнал. 2018. Т. 7. № 2 (23). С. 247-250.

2. Шурыгин В.Ю., Шурыгина И.В. Активизация межпредметных связей физики и математики как средство формирования метапредметных компетенций школьников // Карельский научный журнал. 2016. Т. 5. № 4 (17). С. 41-44.

3. Сабирова Ф.М., Шурыгин В.Ю. Историко-биографический подход при изучении физики будущими учителями физики с использованием LMS MOODLE // Балтийский гуманитарный журнал. 2018. Т. 7. № 1 (22). С. 287-290.

4. Акматбекова А.Ж. Роль электронных учебно-методических пособий в процессе организации самостоятельной работы студентов по физике // Вестник Московского государственного областного университета. Серия: Педагогика. 2017. № 3. С. 62–68.

5. Александров И.В., Строкина В.Р., Афанасьева А.М., Тучков С.В. Опыт организации проблемно-ориентированной внеаудиторной деятельности студентов // Инновации в образовании. 2013. № 4. С. 120–127.

6. Матвеев А. Н. Механика и теория относительности / А. Н. Матвеев.– 4-е изд., стер.– М.: Лань, 2009. – 336 с.

7. Панков К. В. Лабораторная работа «Падение тела сферической формы в вязкой среде» // Физика в школе, 2010, №7, С.46-49.

8. Тищенко Л.В. Экспериментальный практикум и практикум по решению задач по физике как средство развития позиции субъекта учения старшеклассника // Балтийский гуманитарный журнал. 2017. Т. 6. № 3 (20). С. 290-296.

9. Баранов А.В., Петров Н.Ю. Натурный эксперимент и компьютерное моделирование в комплексном элективном курсе по физике Дистанционное и виртуальное обучение. 2016. № 6 (108). С. 78-88.

10. Ким В.С. Виртуальные и натурные эксперименты в обучении физике // Вестник Московского государственного областного университета. Серия: Педагогика. 2010. № 1. С. 163–168.

11. Бобылев Ю. В., Грибков А. И., Романов Р. В., Романов Р. Р. «Дальше или ближе» или о движении тела в вязкой среде // Инновации в образовании, 2017, №4, С.96-106.

12. Фихтенгольц Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления / М.: Госиздательство технико-теоретической литературы, 1962. Т.1. – 608 с.

13. Макаров Е. Г. Инженерные расчеты в Mathcad 15. Учебный курс / СПб.: Питер, 2011. – 400 с.

14. Богатырева Ю.И., Шахаева Д.В. О применении виртуального эксперимента по физике в основной школе // Научные ведомости Белгородского государственного университета. Серия: Гуманитарные науки. 2016. № 7 (228). Выпуск 29. – С. 191–197.

15. Голиков Д.В. Система демонстрационного эксперимента при изучении электромагнитных колебаний и волн в курсе физики основной школы // Вестник Московского государственного областного университета. Серия: Педагогика. 2008. № 4. С. 105–110.

16. Бобылев Ю.В., Грибков А.И., Романов Р.В. Романов Р.Р. Компьютерное моделирование физических процессов как средство развития исследовательской деятельности обучаемых // Высшая школа в России и за рубежом: проблемы и их решения: коллективная монография / отв. ред. А.Ю. Нагорнова. – Ульяновск: Зебра, 2017. – С.314-330.

17. Ревинская О.Г., Кравченко Н.С. Обучение студентов поиску оптимальных условий проведения учебного эксперимента по физике с помощью теоретических моделей // Инновации в образовании. 2015. № 2. С. 25–41.

18. Ан А. Ф., Соколов В. М. Согласование курсов общей физики и математики в высшем техническом образовании // Инновации в образовании, 2012, № 7, С. 4-18.

19. Герцен Т. А., Майзелес С. Б., Любимова Н. Ю. Принципы и опыт интеграции курсов на английском языке в техническом универ-

ситете // Инновации в образовании, 2016, № 12, С. 5-14.
20. Хадиуллина Р. Р. Интегративный подход в обучении студентов-спортсменов дисциплине «Естественно-научные основы физической культуры и спорта: физика» // Инновации в образовании, 2017, № 9, С. 82-91.

Статья поступила в редакцию 20.03.2019
Статья принята к публикации 27.05.2019