УДК 372.853
DOI: 10.26140/bgz3-2020-0903-0008

НЕКОТОРЫЕ МЕТОДИЧЕСКИЕ АСПЕКТЫ ИЗУЧЕНИЯ МЕХАНИЧЕСКИХ КОЛЕБАНИЙ В СИСТЕМЕ С ДВУМЯ СТЕПЕНЯМИ СВОБОДЫ

SPIN-код: 4635-7550
AuthorID: 33963
Бобылёв Юрий Владимирович, доктор физико-математических наук,
профессор кафедры «Общая и теоретическая физика»
SPIN-код: 9969-8531
AuthorID: 303177
Грибков Александр Иванович, кандидат физико-математических наук,
доцент кафедры «Общая и теоретическая физика»
SPIN-код: 6141-3922
AuthorID: 33959
Романов Роман Васильевич, кандидат физико-математических наук,
доцент кафедры «Общая и теоретическая физика»
Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого
(300026, Россия, Тула, пр. Ленина, 125, e-mail: ks7a@ya.ru)

Аннотация. Практически во всех разделах физики приходится сталкиваться с такими явлениями, как колебания, которые охватывают огромную область физических явлений и технических процессов. Колебаниями весьма разнообразными по своей физической природе, характеру и степени повторяемости, быстроте смены состояний и механизму возникновения. Наиболее простыми видами колебательных процессов в силу их наглядности и лёгкой наблюдаемости являются механические колебания, изучение которых в высшей школе происходит в курсах механики и теоретической механики. При этом основными моделями являются математический и пружинный маятники, удобство использования которых обусловлено тем, что они наглядны, легко реализуются в эксперименте и для них достаточно просто выводятся дифференциальные уравнения движения, которые, в свою очередь, относительно легко решаются. Для изучения колебаний, происходящих в механических системах с двумя степенями свободы, используются более сложные модели, наиболее простой из которых является маятник Эйри, представляющий собой комбинацию двух математических маятников, совершающих колебания в перпендикулярных направлениях. Вместе с тем, системой с двумя степенями свободы является и пружинный маятник, который может совершать колебания в вертикальной плоскости, аналогично математическому маятнику. Использованию данного маятника для изучения колебательных процессов, происходящих в механических системах с двумя степенями свободы, а также различных нелинейных режимов и посвящена настоящая статья.

Ключевые слова: высшее, образование, механические, колебания, аналитическое, решение, численные, методы, компьютерное, моделирование, пружинный, маятник, математический, колебательная, система, собственная, частота, анимация, программа, степени, свободы, Эйри, комбинация.

SOME METHODOLOGICAL ASPECTS OF STUDYING MECHANICAL VIBRATIONS IN A SYSTEM WITH TWO DEGREES OF FREEDOM

Bobylev Yuri Vladimirovich, doctor of physics and mathematics sciences, Professor
of the Department of General and Theoretical Physics
Gribkov Alexander Ivanovich, candidate of physics and mathematics sciences, Associate Professor
of the Department of General and Theoretical Physics
Romanov Roman Vasilyevich, candidate of physics and mathematics sciences, Associate Professor
of the Department of General and Theoretical Physics
Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University
(300026, Russia, Tula, Lenin Avenue, 125, e-mail: ks7a@ya.ru)

Abstract. In almost all sections of physics, it is necessary to deal with such phenomena as fluctuations, which cover a huge area of physical phenomena and technical processes. Fluctuations are very diverse in their physical nature, nature and degree of repetitiveness, the speed of change of states and the mechanism of occurrence. The simplest types of vibrational processes due to their visibility and light observability are mechanical fluctuations, the study of which in high school takes place in the courses of mechanics and theoretical mechanics. At the same time, the main models are mathematical and spring pendulums, the convenience of which is due to the fact that they are visual, easily implemented in the experiment and for them just appear differential equations of motion, which are quite simply displayed differential equations of motion, which are in turn, it's easy enough to be tackled. More complex models are used to study the oscillations occurring in mechanical systems with two degrees of freedom, the simplest of which is the Airey pendulum, which is a combination of two mathematical pendulums making fluctuations in perpendicular directions. However, a system with two degrees of freedom is also a spring pendulum, which can make vibrations in the vertical plane, similar to a mathematical pendulum. The use of this pendulum to study vibrational processes: occurring in mechanical systems with two degrees of freedom, as well as various non-linear modes and devoted to this article.

Keywords: higher education, mechanical, oscillation, analytical, solution, numerical, methods, computer, modeling, spring, pendulum, mathematical, vibrational, system, natural, frequency, animation, program, degrees, freedoms, Airy, combination.

Постановка проблемы. При изучении механических колебаний в курсе физики в педагогическом вузе, как, впрочем, и в средней школе, основными моделями являются математический и пружинный маятники. Удобство их использования обусловлено тем, что они наглядны, легко реализуются в эксперименте, для них относительно легко выводятся дифференциальные уравнения движения, которые, в свою очередь, имеют весьма простые решения – гармонически изменяющиеся во времени функции косинус и синус [1-3]. Разумеется, такая ситуация имеет место только в случае малых колебаний маятников, когда движение описывается линейными дифференциальными уравнениями.

Изучение более сложных видов колебаний в курсах общей и теоретической физики в педвузе связано с малыми колебаниями, происходящими в системе с двумя степенями свободы, (прежде всего это фигуры Лиссажу [1, 2, 4-6]), а также с элементами нелинейных колебаний систем с одной степенью свободы. Для моделирования последних используется математический маятник, амплитуда колебаний которого уже не является малой [3, 7, 8]. Пружинный маятник для данных целей практически никогда не используется, собственно говоря, практически никогда и не обговаривается, что колебания пружинного маятника тоже могут быть нелинейными. Это связано с тем, что обычно вывод уравнения движения пружинного маятника, основанный на законе Гука, заведомо приводит к линейным дифференциальным уравнениям.

Вместе с тем, пружинный маятник также является высокоинформативной механической моделью, с помощью которой можно проиллюстрировать как колебания, происходящие в системе с двумя степенями свободы, так и нелинейные колебания. Действительно, обычный грузик на пружине, представляющий собой колебательную систему с одной степенью свободы, можно рассматривать как систему с двумя степенями свободы, если он также будет совершать маятникообразные (наподобие математического маятника) колебания в вертикальной плоскости [9]. Результат взаимодействия этих двух видов колебаний грузика будет существенно зависеть от амплитуд и собственных частот соответствующего пружинного и математического маятников. Аналитическому анализу и численному моделированию маятникообразных колебаний пружинного маятника и посвящена настоящая работа.

Основные уравнения и их анализ. Рассмотрим следующую колебательную систему. Груз массой *m* висит на пружине (рис.1), длина которой в ненапряжённом состоянии l_0, а коэффициент жёсткости *k*. Считаем, что в процессе колебаний пружина не изгибается и её упругость сохраняется при любом растяжении. Силу сопротивления среды не учитываем. Данная система имеет две степени свободы.

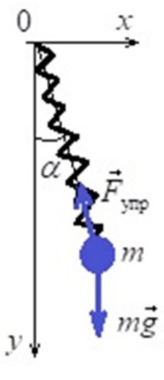

Рисунок 1 – Колебательная система

За обобщённые координаты примем декартовы координаты грузика *x* и *y*. Не останавливаясь на деталях вывода уравнений движения маятника, который может быть проведён различными методами, запишем окончательный результат

$$\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} + \omega^2\left(1 - \frac{l_0}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)x = 0,$$

$$\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2} + \omega^2\left(1 - \frac{l_0}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)y - g = 0, \qquad (1)$$

где $\omega = \sqrt{k/m}$. При выводе данных уравнений никаких ограничений ни на величину деформации пружины, ни на величину угла отклонения маятника от вертикали не накладывалось. Если же мы будем рассматривать лишь малые (линейные) колебания, при которых эти величины изменяются очень незначительно вблизи своих положений равновесия, то уравнения, описывающие такие движения маятника, получаются из (1) с помощью процедуры линеаризации и имеют вид

$$\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} + \frac{g}{l}x = 0, \quad \frac{\mathrm{d}^2 z}{\mathrm{d}t^2} + \frac{k}{m}z = 0. \qquad (2)$$

Здесь

$$z = y - l, \qquad |z| << y; l, \qquad l = l_0 + \Delta l_g,$$

$$\Delta l_g = \frac{mg}{k} = \frac{g}{\omega^2}, \qquad (3)$$

l – длина пружины в положении статического равновесия, z – отклонение длины пружины от l, получаемое ей в процессе колебаний.

Как следует из (2), в линейном приближении малые колебания маятника вдоль горизонтальной оси *x* и вертикальной оси *y* происходят независимо друг от друга с частотами

$$\omega_{\tilde{o}} = \sqrt{\frac{g}{l}}, \quad \omega_{\acute{o}} = \sqrt{\frac{k}{m}}, \qquad (4)$$

$\omega_{\tilde{o}}$ – собственная частота маятниковых колебаний (совпадает с частотой математического маятника), $\omega_{\acute{o}}$ – собственная частота вертикальных колебаний (совпадает с частотой пружинного маятника).

При этом, если собственная частота маятниковых колебаний не близка к собственной частоте вертикальных колебаний (или не близка к половине частоты собственных вертикальных колебаний), то вертикальные колебания груза, подвешенного на пружине при определённых начальных условиях можно считать движением с одной степенью свободы. Движения грузика в таком случае будут близки к вертикальным; «незаметные» маятниковые колебания не изменяют принципиально движения системы [9].

Если же частота маятниковых колебаний грузика будет близка к собственной частоте его вертикальных колебаний, или частота вертикальных колебаний будет в два раза больше частоты маятниковых колебаний, то при возбуждении вертикальных колебаний будут возникать маятниковые и наоборот. Например, отведя груз вертикально вниз и отпустив его, мы возбудим вертикальные колебания маятника, но при этом от нашего толчка или от других случайных толчков возникнут небольшие маятникообразные колебания. Система в этом состоянии приближенно будет вести себя, как маятник с переменной длиной. Длина маятника меняется с такой частотой, что возможен параметрический резонанс, и, следовательно, маятниковые колебания начнут усиливаться, конечно, за счёт уменьшения энергии вертикальных колебаний [9]. Именно этот процесс последовательной перекачки энергии между вертикальными и маятниковыми колебаниями, происходящий при определённых условиях в нашей системе, будет далее рассмотрен в настоящей работе.

Уравнения (1) являются нелинейными и их решение в общем случае возможно только численными методами. Однако привлечение известных в математике приближённых методов [10, 11] (пример использования мультидисциплинарного подхода [12]), позволяет провести предварительный анализ задачи, определить и описать различные квазилинейные режимы колебаний грузика. Для этого получим из (9) нелинейные уравнения, определяющие ангармонические поправки к колебаниям грузика, поскольку именно они и будут определять связь вертикальных и маятниковых колебаний друг с другом [13–16]. Подставляя (3) в (1), проведём разложение корня и оставим в уравнениях члены только до второго порядка малости, что достаточно для установления ангармонических поправок к движению маятника. В результате получим

$$\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2}+\omega_x^2 x+2\alpha xz=0,\quad \frac{\mathrm{d}^2 z}{\mathrm{d}t^2}+\omega_y^2 z+\alpha x^2=0 \quad (5)$$

Здесь введено обозначение

$$\alpha=\frac{kl_0}{2ml^2} \quad (6)$$

Положим $\omega_{\delta}=2\omega_{\delta}$ (в дальнейшем (см. (1)) будем обозначать $\omega_{\delta}=\omega$), тогда уравнения (5) запишутся следующим образом

$$\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2}+\omega^2 x+2\alpha xz=0,\quad \frac{\mathrm{d}^2 z}{\mathrm{d}t^2}+4\omega^2 z+\alpha x^2=0 \quad (7)$$

Решение данной системы уравнений будем искать в виде

$$x(t)=A(t)\exp(i\omega t)+A^*(t)\exp(-i\omega t)+\delta x(t),$$
$$y(t)=B(t)\exp(2i\omega t)+B^*(t)\exp(-2i\omega t)+\delta y(t), \quad (8)$$

где $A(t)$ и $B(t)$ - медленно меняющиеся амплитуды колебаний, а $\delta x(t)$ и $\delta y(t)$ - быстро осциллирующие малые по величине слагаемые. Подставляя (8) в (7), и, считая выполненными условия

$$\left|\frac{d^2A}{dt^2}\right| << \omega\left|\frac{dA}{dt}\right| << \omega^2|A|;\quad \delta x(t)\sim\delta y(t) << |A|, \quad (9)$$

отбрасывая быстро осциллирующие слагаемые, получим для комплексных амплитуд $A(t)$ и $B(t)$ соотношения

$$\omega\frac{dA}{dt}+i\alpha A^*B=0,\quad 4\omega\frac{dB}{dt}+i\alpha A^2=0 \quad (10)$$

Данные уравнения имеют следующие интегралы

$$|A|^2+4|B|^2=C=\mathrm{const},\quad A^{*2}B+A^2B^*=D=\mathrm{const}, \quad (11)$$

используя которые из первого уравнения в (10) можно получить следующее дифференциальное уравнения для квадрата модуля амплитуды $|A|^2$

$$\left(\frac{d|A|^2}{dt}\right)^2=\frac{\alpha^2}{\omega^2}\left(|A|^4\left(C-|A|^2\right)-D^2\right). \quad (12)$$

По своему виду это уравнение аналогично уравнению одномерного движения частицы [13, 14] с координатой $|A|^2$ в силовом поле с потенциальной энергией $U(|A|^2)=-|A|^4\left(C-|A|^2\right)$, при этом величина $-D^2$ будет выступать в роли полной энергии. Тогда по аналогии с задачей об одномерном движении частицы, уравнение (12) удобно исследовать с помощью графика $U=U(|A|^2)$ (рис.2), из которого видно, что при заданном D амплитуда $|A|$ будет изменяться между двумя «точками поворота». Следовательно, грузик будет совершать быстрые колебания с частотой ω, амплитуда которых медленно изменяется от некоторого минимального $|A|_{\min}$ до некоторого максимального $|A|_{\max}$ значений. Эти изменения также будут периодическими.

С учётом сказанного, можно сделать следующий вывод о характере движения грузика: когда частота его вертикальных колебаний в два раза больше частоты маятниковых колебаний, колебания будут носить характер биений. Здесь нужно отметить, что в отличие от колебаний осцилляторов с линейной связью, в данном случае от начальных амплитуд и фаз зависит не только глубина биений, но и их период [13, 16].

Компьютерное моделирование. Данные аналитические выводы подтверждаются результатами численных расчётов, для проведения которых введём безразмерные переменные и параметры

$$\tau=\omega t,\quad X=\frac{x}{l_0},\quad Y=\frac{y}{l_0},\quad \Delta Y_g=\frac{g}{\omega^2 l_0}=\frac{\Delta l_g}{l_0}, \quad (13)$$

в которых система (1) запишется следующим образом:

$$\frac{\mathrm{d}^2X}{\mathrm{d}^2\tau}+\left(1-\frac{1}{\sqrt{X^2+Y^2}}\right)X=0,$$
$$\frac{\mathrm{d}^2Y}{\mathrm{d}\tau^2}+\left(1-\frac{1}{\sqrt{X^2+Y^2}}\right)Y-\Delta Y_g=0. \quad (14)$$

Дополним уравнения (14) стандартными начальными условиями, записанными также в безразмерном виде:

$$X|_{\tau=0}=X_0,\ V_X|_{\tau=0}=V_{0X},\ Y|_{\tau=0}=Y_0,\ V_Y|_{\tau=0}=V_{0Y}. \quad (15)$$

Для моделирования колебаний, происходящих в рассматриваемой системе, авторами разработано Windows-приложение, вид которого представлен на рис.3.

Программа снабжена необходимыми поясняющими материалами, хотя её интерфейс прост и интуитивно понятен.

Заметим, что первые три параметра задачи в верхнем правом углу окна в настоящей работе не будут востребованы, так как они характеризуют затухание, частоту и амплитуду внешней вынуждающей силы, что в данной задаче не учитывается. Дело в том, что представленная программа, помимо явлений, рассматриваемых в этой работе, позволяет моделировать и другие колебательные процессы, реализуемые пружинным маятником, но о них мы предполагаем рассказать в следующих публикациях.

На рис.3а приведена область анимации, на которой изображаются колебания маятника, и рисуется его траектория. Здесь же показано, что точка подвеса маятника может совершать горизонтальные колебания по заданному закону (в настоящей задаче она фиксирована). На рис.3б приведены результаты интегрирования системы (14): зависимости $X=X(\tau)$ и $Y=Y(\tau)$. Из этих графиков видно, что при выбранных параметрах вертикальные колебания грузика (нижний график на рис.3б) происходят с частотой в два раза большей, чем горизонтальные (верхний график на рис.3б).

Сами же колебания действительно носят характер биений. Заметим, что при интегрировании нелинейных уравнений (14), нужные режимы малых колебаний, (соответствующие уравнению (7)) подбирались с помощью начальных условий (15).

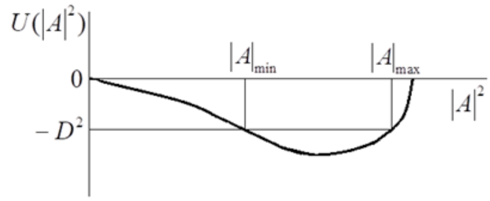

Рисунок 2 – График зависимости потенциальной энергии от квадрата модуля амплитуды

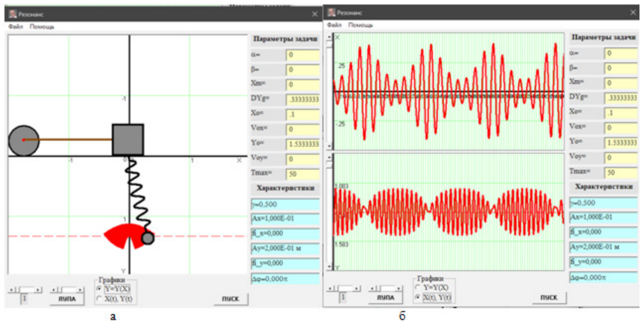

Рисунок 3 – Моделирование колебаний

Аналогичные расчёты для других начальных условий представлены на рис.4.

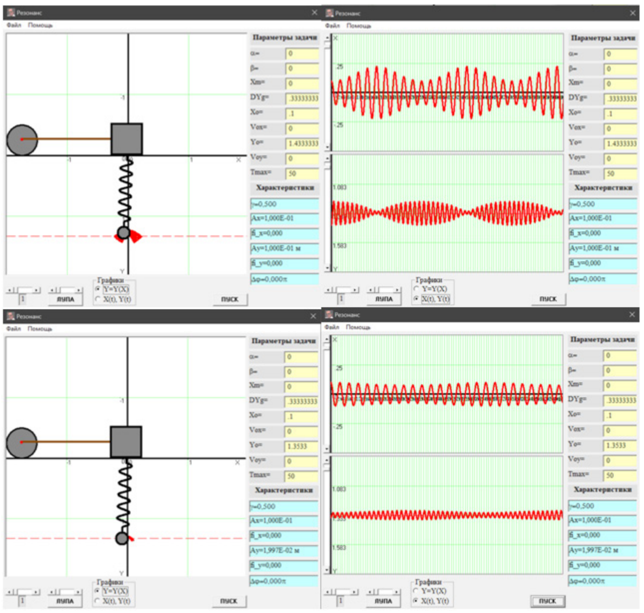

Рисунок 4 – Иллюстрация зависимости от начальных условий глубины и периода биений

Эти рисунки иллюстрируют сделанный при проведении линейного анализа вывод о зависимости от начальных условий, как глубины, так и периода биений, что отличает данный случай от колебаний осцилляторов с линейной связью.

Заключение. Подведём итоги. В данной статье было продемонстрировано использование одной из наиболее простых моделей колебательных систем – пружинного маятника для изучения более сложных колебательных процессов: происходящих в механических системах с двумя степенями свободы, а также различных нелинейных режимов. При этом были использованы как аналитические, так и численные методы. Считаем, что данный материал будет интересен и полезен студентам педагогических вузов, изучающих механические колебания в курсах общей и теоретической физики. Заметим также, что полезность рассмотренной нами задачи о колебаниях пружинного маятника, помимо всего прочего, обусловлена тем, что она имеет ряд интересных физических приложений. Например, она имеет отношение к связи продольных и изгибных колебаний молекулы CO_2 (так называемый резонанс Ферми [13, 17, С. 440]) и к удвоению частоты света в нелинейной оптике [18, 19]. Также в работе используется компьютерное моделирование физических процессов, что само по себе актуально в педагогическом плане, и отражено, например, в [20].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ:

1. Савельев И. В. Курс физики. т.1. Механика. Молекулярная физика / М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1970.

2. Алешкевич В. А., Деденко Л. Г., Караваев В. А. Колебания и волны. Лекции / Издательство Физического факультета МГУ, 2001.

3. Пановко Я. Г. Введение в теорию механических колебаний. М.: Наука, 1991.

4. Гервидс В. И. Фигуры Лиссажу: запись песком. // [Электронный ресурс]. URL: https://www.youtube.com/watch?time_continue=7&v=rd-WWvjH8cPM&feature=emb_logo. (дата обращения 28.02.2020)

5. Романов Р. В. Сложение перпендикулярных механических колебаний (фигуры Лиссажу) //Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ №2019662764. Дата государственной регистрации в Реестре программ для ЭВМ 02.10.2019. [Электронный ресурс]. URL: https://elibrary.ru/item.asp?id=41183352. (дата обращения 28.02.2020).

6. Бобылев Ю. В., Грибков А. И., Романов Р. В. Моделирование сложения взаимно перпендикулярных колебаний в механической системе с двумя степенями свободы. // Проблемы учебного физического эксперимента: Сборник научных трудов. Материалы XXV Всероссийской научно-практической конференции «Учебный физический эксперимент. Актуальные проблемы. Современные решения»: Выпуск 32. М.: ИСРО РАО, 2020, С.80-81.

7. Кильчевский, Н. А. Курс теоретической механики т.2: Динамика системы / Н.А. Кильчевский. М.: Наука, 1977.

8. Лойцянский, Л. Г., Лурье, А. И. Курс теоретической механики, т.2 / Л.Г. Лойцянский, А.И. Лурье. М.: Наука, 1983.

9. Стрелков С. П. Введение в теорию колебаний. / М.: Наука, 1964.

10. Бать М. И., Джанелидзе Г. Ю., Кельзон А. С. Теоретическая механика в примерах и задачах. Том 3. (Специальные главы механики) / М.: Наука, 1973.

11. Власова Е. А., Зарубин В. С., Кувыркин Г. Н. Приближенные методы математической физики: Учеб. для вузов / Под ред. B.C. Зарубина, А.П. Крищенко. - М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2001.

12. Бобылев Ю. В., Грибков А. И., Романов Р. В. Мультидисциплинарный подход в задаче о максимальной дальности полёта тела в вязкой среде // Азимут научных исследований: педагогика и психология, 2019, Т.8, №2(27), С. 41-44.

13. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Механика / М.: Наука, 1988.

14. Коткин Г. Л., Сербо В. Г., Черных А. И. Лекции по аналитической механике / Москва-Ижевск: РХД, 2010.

15. Сербо В. Г., Черкасский В. С. Дополнительные главы аналитической механики. Электронный учебник. / Новосибирск 2013.

16. Коткин Г. Л., Сербо В. Г. Сборник задач по классической механике / М.: Наука, 1977.

17. Э. Ферми. Научные труды, т.1 / М.: Наука, 1971.

18. Н. Бломберген Нелинейная оптика, Приложение 1 / М: Мир, 1966.

19. Шен И. Принципы нелинейной оптики / М.: Мир, 1989.

20. Чесноков А.Н., Якупова М.М., Епифанов С.В. Компьютерное моделирование и интернет-технологии в общеобразовательном процессе // Азимут научных исследований: педагогика и психология, 2014, № 4 (9), С. 133-137.

Статья поступила в редакцию 09.03.2020
Статья принята к публикации 27.08.2020