

УДК 372.853

DOI: 10.26140/bgz3-2019-0803-0002

АНАЛИТИЧЕСКОЕ, КОМПЬЮТЕРНОЕ И НАТУРНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПАДЕНИЯ ШАРА В ВЯЗКОЙ СРЕДЕ

© 2019

Бобылёв Юрий Владимирович, доктор физико-математических наук, профессор кафедры
«Общая и теоретическая физика»

Грибков Александр Иванович, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры
«Общая и теоретическая физика»

Романов Роман Васильевич, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры
«Общая и теоретическая физика»

*Тульский государственный педагогический университет им. Л.Н. Толстого
(300026, Россия, Тула, улица пр. Ленина, 125, e-mail: rom_rom_vas@mail.ru)*

Аннотация. В работе рассмотрен пример решения задачи падения шара в вязкой среде с помощью аналитических, численных и компьютерных методов. Решение подкреплено проведённым натурным экспериментом. Такой комплексный подход к решению физической задачи позволяет сформировать основные профессиональные навыки студентов – будущих педагогов. Постановка эксперимента не совсем типична. Используется весьма доступная и более удобная среда, в которой наблюдается движение тела – дистиллированная вода, которая в случае попадания на окружающие предметы или одежду обучающихся, в отличие от используемого традиционно масла, не может их испортить, что упрощает многократное проведение эксперимента и служит примером его правильной методической организации. Относительно малая вязкость среды компенсируется подбором материала образцов с плотностью, близкой к плотности среды, что легко осуществить в наше время благодаря широкому распространению пластмасс. Подготовленное Windows-приложение, моделирующее рассматриваемую задачу, значительно упрощает подбор материалов для натурального эксперимента. Рассматриваемый в работе подход эффективен для осмысления и усвоения студентами материала разных дисциплин и позволяет продемонстрировать комплексный подход, как к теоретическому решению задачи, так и к методической организации физического эксперимента. Такой подход достаточно давно применяется авторами в учебном процессе для физико-математических направлений педвуза.

Ключевые слова: аналитическое решение, численные методы, компьютерное моделирование, вязкое трение, экспериментальная физика, высшее образование, лабораторная работа, падение, шар, внутреннее трение.

MULTIDISCIPLINARY APPROACH IN PROBLEM ABOUT MAXIMUM RANGE BODY IN A VISCOUS MEDIUM

© 2019

Bobylev Yuri Vladimirovich, doctor of physics and mathematics sciences, professor

Gribkov Alexander Ivanovich, candidate of physics and mathematics sciences, docent

Romanov Roman Vasilyevich, candidate of physics and mathematics sciences, docent

Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University

(300026, Russia, Tula, Lenin Avenue, 125, e-mail: rom_rom_vas@mail.ru)

Abstract. The paper considers an example of solving the problem of a ball falling in a viscous medium using analytical, numerical and computer methods. The decision is supported by the conducted field experiment. Such an integrated approach to solving physical problems allows to form the basic professional skills of students-future teachers. The setting of the experiment is not quite typical. A very accessible and more convenient environment is used, in which the movement of the body is observed – distilled water, which in case of contact with surrounding objects or clothes of students, unlike the oil used traditionally, can not spoil them, which simplifies the repeated conduct of the experiment and serves as an example of its correct methodological organization. The relatively low viscosity of the medium is compensated by the selection of material samples with a density close to the density of the medium, which is easy to implement in our time due to the wide spread of plastics. Prepared Windows-application simulating the problem, greatly simplifies the selection of materials for full-scale experiment. The approach considered in the work is effective for comprehension and assimilation of students of a material of different disciplines and allows to demonstrate complex approach, both to the theoretical solution of a problem, and to the methodical organization of physical experiment. This approach has long been used by the authors in the educational process for physical and mathematical directions of pedagogical University.

Keywords: analytical solution, numerical methods, computer simulation, viscous friction, experimental physics, higher education, laboratory work, fall, ball, internal friction.

Постановка проблемы. «Природа начинается с причин и кончается опытом, нам надобно идти путём обратным, то есть начинать с опыта и с ним изыскивать причину» [1, С. 108]. Прислушаемся к совету великого Леонардо, тем более что методика преподавания физики эту мысль только подтверждает. Особенно удачный результат получается, если в опыте можно дать количественные оценки, совпадающие в пределах погрешности с аналитическими результатами.

Кроме того, в последнее время авторы замечают, что для современных студентов формулы (теория) – это одно, демонстрационные и описанные в учебниках эксперименты – это другое, а реальные наблюдения и опыты – что-то третье, и всё это между собой никак не связано!

Возможно, это является следствием того, что экспериментов в школе и ВУЗе в силу ряда причин показывается недостаточно, и они носят, как правило, не количественный, а качественный характер.

Лабораторный практикум несколько улучшает по-

ложение, но в ВУЗе он постоянно сокращается из-за уменьшения количества часов, а в школе точность и аккуратность измерений недостаточна, и на погрешность измерений часто не обращают должного внимания [2, 6].

Тем не менее, ситуацию надо исправлять и постоянно демонстрировать неразрывную связь между теоретической, вычислительной и экспериментальной физикой, а также между физикой (наукой о природе) и окружающей действительностью [7-11].

Покажем, как это можно сделать достаточно простыми средствами на примере оценки времени падения шара в вязкой среде.

В традиционном лабораторном практикуме есть две лабораторные работы на эту тему: «Определение ускорения силы тяжести при свободном падении тела» [12, С. 51] и «Определение коэффициента внутреннего трения жидкости» [13, С. 226].

1. Постановка задачи.

Для шара, падающего с небольшой высоты, уравнения движения записываются следующим образом:

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{v}, \quad m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{F}_T + \mathbf{F}_A + \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2. \quad (1)$$

Здесь: $\mathbf{F}_T = m\mathbf{g} = \rho V \mathbf{g}$, $\mathbf{F}_A = -\rho_0 V \mathbf{g}$ – силы тяжести и Архимеда. Сопротивление среды складывается из двух слагаемых: $\mathbf{F}_1 = -6\pi\eta a \mathbf{v} = -3\pi\eta d \mathbf{v}$ – сила вязкого трения по Д. Стоксу (G. Stokes) и $\mathbf{F}_2 = -c \frac{\rho_0 S}{2} v \mathbf{v}$ – сила аэ-

родинамического (лобового) сопротивления по И. Ньютону (I. Newton) [14, С. 205].

В данных формулах использованы обозначения: d – диаметр шара, ρ – плотность материала шара, $V = \pi d^3/6$

и $m = \rho V$ – его объём и масса, $S = \pi d^2/4$ – площадь проекции тела на плоскость, перпендикулярную к направлению движения, η – коэффициент динамической вязкости среды, ρ_0 – плотность среды, c – коэффициент лобового сопротивления. Для шара $\tilde{\eta} = 0,50$ [15, С. 208].

Полное аналитическое решение задачи при прямолинейном движении для зависимости скорости и координаты от времени приведено в [16], где для удобства введены обозначения, смысл которых описан там же:

$$\tau = \frac{\rho d^2}{18\eta}, \quad v_p = g\tau \left(1 - \frac{\rho_0}{\rho}\right), \quad R = \frac{4\rho d}{3c\rho_0}, \quad b = \frac{4v_p \tau}{R} = \frac{c\rho_0(\rho - \rho_0)gd^3}{108\eta^2}. \quad (2)$$

$$v_{p21} = \frac{2v_p}{b}(\sqrt{1+b} - 1) > 0, \quad v_{p22} = -\frac{2v_p}{b}(\sqrt{1+b} + 1) < 0. \quad (3)$$

Если позволяет начальная высота, то при достижении скорости v_{p21} ускорение становится равным нулю и

дальнейшее движение – равномерным.

2. Компьютерное моделирование

Авторами подготовлено и используется в учебном процессе Windows-приложение, моделирующее данный эксперимент и позволяющее в широком диапазоне варьировать параметры задачи (рисунок 1).

3. Результаты натурного эксперимента

Реальный эксперимент выполняется достаточно просто. Стеклянная колба длиной более 1 м и диаметром $D = 60$ заполнена дистиллированной водой. Краевые

эффекты малы, так как $D \gg d$. Высота падения $h = (1,080 \pm 0,005)$, пластиковый шар для стрельбы из

игрушечного пистолета массой, измеренной на аналитических электронных весах, $m = (0,14 \pm 0,01)$, и диаметром, измеренным микрометром, $d = (5,9 \pm 0,1)$, что

даёт среднюю плотность $\rho = 1302$ ³. Для воды $\rho_0 = 1000$ ³, $\eta = 0,00106$. Ускорение свободно-го падения $g = 9,814$ ².

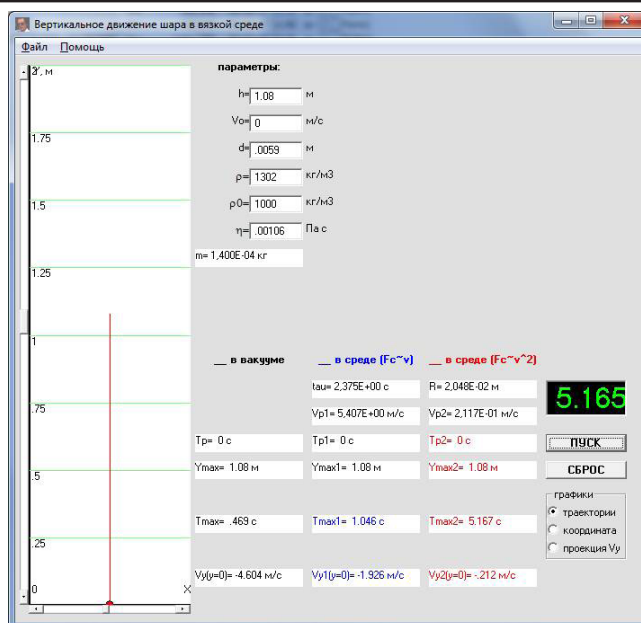


Рисунок 1 - Главное окно Windows-приложения

Шар отпускается без начальной скорости и ручным электронным секундомером Nema-SW-104 с дискретностью 0,01 с засекается время прохождения указанной высоты $t_{y\text{en}}$. Понятно, что высокой точности в такой по-

становке добиться невозможно, но она и не требуется.

После многократных измерений $t_{y\text{en}} = (5,4 \pm 0,3)$.

4. Аналитические оценки времени падения

Теперь выясним, какая из сил сопротивления играет основную роль, или их необходимо учитывать одновременно.

Из (3) очевидно, что при $b \ll 1$ $v_{p21} \rightarrow v_p$, то есть преобладает сила F_1 . В обратном пределе $b \gg 1$, определяющую роль играет сила F_2 , $v_{p21} \rightarrow \frac{2v_p}{\sqrt{b}} = v_{p2}$, что по

смыслу совпадает с [17, С.341], правда явный вид v_{p2}

там не приведён.

Исходя из параметров задачи $\tau = 2,375$ с, $v_p = 5,407$, $R = 0,02$, $b = 2508$, $v_{p2} = 0,216$, $v_{p21} = 0,212$.

Оценки времени падения с учётом разных сил приведены в таблице 1.

Таблица 1- Формулы оценки времени падения

Учёт сил	Время падения
Вакуум	$t_T = \sqrt{\frac{2h}{g}} = 0,469$ с
Сила Архимеда	$t_A = \sqrt{\frac{2h}{g(1 - \frac{\rho_0}{\rho})}} = 0,974$ с
Сила F_1 (оценочно)	$t_{10} = h/v_p = 0,200$ с
Сила F_1 (численно)	$t_1 = \frac{h}{v_p} + \tau \left(1 - e^{-\frac{h}{v_p \tau}}\right)$, $t_1 = 1,045$ с. (4)
Сила F_2 (оценочно)	$t_{20} = h/v_{p2} = 5,023$ с
Сила F_1 и F_2 (оценочно)	$t_{200} = h/v_{p21} = 5,094$ с
Сила F_1 и F_2 (численно)	$0 = h - v_{p21} t_2 - R \ln \left(\frac{e^{-t_2/\tau} - \frac{v_{p21}}{v_p}}{1 - \frac{v_{p21}}{v_p}} \right)$, $\delta = \frac{\sqrt{1+b}}{\tau}$, $t_{21} = 5,167$ с. (5)

Заметим, что для точного нахождения времени при учёте сил сопротивления необходимо в обоих случаях численно решать трансцендентные уравнения (4) и (5).

что вполне просто и успешно может быть выполнено в какой-либо вычислительной среде, например, РТС Mathcad.

Из таблицы видно, что оценки времени t_{10} и t_1 значительно отличаются, так как при заданной высоте предельная скорость v_p не достигается. Скорости же v_{p2} и v_{p21} близки, и оценки времени t_{20} , t_{210} , t_{21} практически совпадают.

Полученные времена для разных сил существенно отличаются, поэтому и эксперимент может быть выполнен с невысокой точностью. При сравнении с реальным временем, очевидно, что основную роль при таких параметрах играет сила F_2 .

5. Критерий применимости приближения разных сил

Из (1) и (2) следует, что силой лобового сопротивления можно пренебрегать по сравнению с силой вязкого трения при условии $F_1 \gg F_2$, то есть для шара

$$3\pi\eta d \gg c \frac{\rho_0 S}{2} v, \quad \text{или} \quad vd \ll \frac{48\eta}{\rho_0}. \quad (6)$$

Для воды $vd \ll 5,1 \cdot 10^{-5} \text{ м}^2$, для нашего шара $vd \ll 6,6 \cdot 10^{-3}$. В поставленном опыте выполняется противоположное условие, что и было отмечено при оценке времени.

Авторы учебников [14, С. 205, 16, С. 341] прямо пишут, что силу F_2 следует учитывать при достижении больших скоростей, однако заранее неизвестно, какая скорость может быть достигнута при заданных условиях, поэтому практически условие (6) в таком виде трудно применимо.

Из (2) и (3) следует, что $F_1 \gg F_2$, если

$$b = \frac{c\rho_0(\rho - \rho_0)gd^3}{108\eta^2} \ll 1. \quad (7)$$

В нашем опыте $b \gg 1$, и определяющую роль играет сила F_2 . Поэтому критерий (7) представляется более предпочтительным, чем (6).

Условие (7) также не выполняется для свинцовой дроби ($d = 5,0 \cdot 10^{-3} \text{ м}$, $\rho = 11340 \text{ кг/м}^3$) в воде. $b = 52270 \gg 1$.

Однако расчётное время падения при этом составляет 1,02 с и реальный эксперимент провести достаточно затруднительно из-за большой погрешности измерений.

А при падении той же дроби в касторовом масле ($\rho_0 = 960 \text{ кг/м}^3$, $\eta = 0,985 \text{ Па·с}$), $b = 0,058 \ll 1$, и в этом случае силу F_2 учитывать не имеет смысла. Расчётное

время падения составляет 7,64 с, что хорошо совпадает с результатами выполнения лабораторной работы.

Также обе силы и силу Архимеда не стоит учитывать и при падении с высоты порядка 2 м стального шара ($d = 10^{-2} \text{ м}$, $\rho = 7800 \text{ кг/м}^3$) в воздухе ($\rho_0 = 1,23 \text{ кг/м}^3$,

$\eta = 0,000182 \text{ Па·с}$), что опять-таки подтверждается лабораторными опытами.

Здесь же дадим оценку числа Рейнольдса (O. Reynolds) (Re в нашем опыте

$$Re = \frac{\rho_0 v_{p21} d}{\eta} \approx 1180.$$

То есть Re достаточно велико и обтекание вряд ли можно считать полностью ламинарным, что наглядно проявляется опять-таки в опыте, так как шарик совершает не строго вертикальное движение.

Заключение

В работе приведены аналитические расчёты и выявлен критерий учёта силы лобового сопротивления или силы вязкого трения.

Расчёты подтверждаются компьютерным моделированием и натурным экспериментом. Из примеров ясно видно, что простые (школьные) формулы в реальных условиях могут давать результаты, далекие от действительных значений.

При выполнении лабораторного практикума по физике, а также при изучении курса «Основы вычислительного эксперимента» студентам на практических примерах показывается и доказывается обоснованность тех или иных приближений при записи физических формул, что положительно влияет на усвоение знаний и их дальнейшее практическое применение в профессиональной деятельности [17-20].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ:

1. Леонардо да Винчи. Избранные произведения: в 2 т. / пер. А. А. Губера, В. П. Зубова, В. К. Шилейко, А. М. Эфроса; под ред. А. К. Джигелева, А. М. Эфроса. – М.: Изд-во Студии Артемия Лебедева, 2010. Т. 1. – 444 с. [Электронный ресурс]. URL: <https://www.artlebedev.ru/izdal/da-vinci/>.
2. Тищенко Л.В. Уроки-практикумы по физике (углубленный уровень) как способ организации учебно-исследовательской деятельности обучающихся // Азимут научных исследований: педагогика и психология. 2016. Т. 5. № 4 (17). С. 266–271.
3. Ревинская О.Г., Кравченко Н.С. Обучение студентов поиску оптимальных условий проведения учебного эксперимента по физике с помощью теоретических моделей // Инновации в образовании. 2015. № 2. С. 25–41.
4. Алиева С.С. Педагогические принципы междисциплинарного образования и диалога. // Азимут научных исследований: педагогика и психология. 2017. Т. 6. № 4 (21). С. 18–21.
5. Палферова С.Ш., Кузнецова О.А., Павлова Е.С. Проектирование системы профилирования математической подготовки бакалавров технического профиля на основе интегративного подхода. // Азимут научных исследований: педагогика и психология. 2018. Т. 7. № 2 (23). С. 190–195.
6. Голиков Д.В. Система демонстрационного эксперимента при изучении электромагнитных колебаний и волн в курсе физики основной школы // Вестник Московского государственного областного университета. Серия: Педагогика. 2008. № 4. С. 105–110.
7. Александров И.В., Строккина В.Р., Афанасьева А.М., Тучков С.В. Опыт организации проблемно-ориентированной внеаудиторной деятельности студентов // Инновации в образовании. 2013. № 4. С. 120–127.
8. Акматбекова А.Ж. Роль электронных учебно-методических пособий в процессе организации самостоятельной работы студентов по физике // Вестник Московского государственного областного университета. Серия: Педагогика. 2017. № 3. С. 62–68.
9. Ивинская М.С. Повышение качества образования на основе использования электронной информационно-образовательной среды. // Азимут научных исследований: педагогика и психология. 2017. Т. 6. № 1 (18). С. 73–75.
10. Баранов А.В., Петров Н.Ю. Натурный эксперимент и компьютерное моделирование в комплексном элективном курсе по физике Дистанционное и виртуальное обучение. 2016. № 6 (108). С. 78–88.
11. Ким В.С. Виртуальные и натурные эксперименты в обучении физике // Вестник Московского государственного областного университета. Серия: Педагогика. 2010. № 1. С. 163–168.
12. Майсова Н. Н. Практикум по курсу общей физики / Изд. 2-е, переработ. и доп. Учебное пособие. М.: Высш. школа, 1970. – 448 с.
13. Физический практикум. Механика и молекулярная физика: учебное пособие / Под ред. В. И. Ивероновой. — 2-е изд. — Москва: Наука, 1967. — 352 с.
14. Путилов К. А. Курс физики: В 3 т. Т. 1. Механика. Акустика. Молекулярная физика. Термодинамика / К. А. Путилов. — 11-е изд. — М.: ГИ ФМЛ, 1963. — 560 с.
15. Бобылёв Ю. В., Грибков А. И., Романов Р. В. О сочетании аналитических и численных методов при решении физических задач // Инновации в образовании, 2018, №11, С. 115-126.
16. Матвеев А. Н. Механика и теория относительности / А. Н. Матвеев. — 4-е изд., стер. — М.: Лань, 2009. — 336 с.
17. Богатырева Ю.И., Шахаева Д.В. О применении виртуального эксперимента по физике в основной школе // Научные ведомости Белгородского государственного университета. Серия: Гуманитарные науки. 2016. № 7 (228). Выпуск 29. — С. 191–197.
18. Ан А. Ф., Соколов В. М. Согласование курсов общей физики и математики в высшем техническом образовании // Инновации в образовании, 2012, № 7, С. 4-18.
19. Герцен Т. А., Майзелес С. Б., Любимова Н. Ю. Принципы и опыт интеграции курсов на английском языке в техническом универ-

ситете // *Инновации в образовании*, 2016, № 12, С. 5-14.

20. Хадиуллина Р. Р. Интегративный подход в обучении студентов-спортсменов дисциплине «Естественно-научные основы физической культуры и спорта: физика» // *Инновации в образовании*, 2017, № 9, С. 82-91.

Статья поступила в редакцию 16.07.2019

Статья принята к публикации 27.08.2019